関数近似と補間について

関数近似には...

最小二乗法や直交多項式を利用したルジャンドル近似，チェビシェフ近似，エルミート近似，また，区間多項式を利用したスプライン近似などがあります．さらに，補間法としてはニュートンの差分商公式やラグランジェ補間公式などがあります．

最小二乗法について....

最小二乗法は関数に対しても定義できますが，ここでは離散的なデータについて考えてみましょう．

いま，離散的なデータを$(x_i, y_i), i = 1..n$　とします．

それに対して近似関数 $f(x)$ をm個の独立した関数列$\phi_k(x), k = 1..m$で表すことにします．

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \phi_k(x)$$

このとき，各離散データを近似関数との誤差の２乗したものの総和をSとしますと，

$$S = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - f(x_i)\}^2$$

となりますが，最小二乗法では，このSが最小になるように各係数a_kを決定します．そのために，

$\partial S / \partial a_k = 0$, $k = 1..m$

多項式を利用した最小二乗法...

近似関数を

$$f(x) = a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + ... + a_j x^{m-j+1} + ... + a_m x + a_{m+1}$$

としますと，$\partial S / \partial a_k = 0$, $k = 1..m$よりa_kに関する連立方程式

$$(A_{ij})(a_i) = (F_i) \text{ , } i = 1..m+1 \text{ , } j = 1..m+1$$

が導出され，マトリックスの係数は

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_k^{m-i+1} x_k^{m-j+1}$$

$$F_i = -\sum_{k=1}^{n} x_k^{m-i+1} y_k$$

ただし，nは離散データの総数です．

特殊な形の式を利用した最小二乗法...

近似関数が$y = Ae^{Bx}$は，両対数をとると，

$\log y = Bx + \log A$

となるので，xと$\log y$の間で直線の最小二乗法になります．

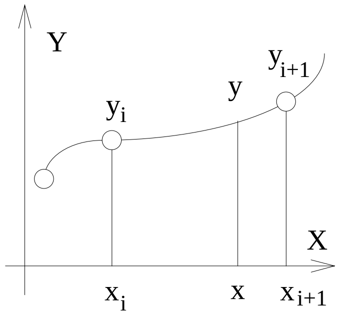
また，$y = Ax^B$も両対数をとると，

$\log y = B \log x + \log A$

となるので，$\log x$と$\log y$の間で直線の最小二乗法になります．

スプライン近似...

スプライン近似は離散データを区間多項式で近似します．すなわち，各データの間を異なる関数で近似します．



スプライン近似は多くの種類がありますが，ここでは，接点で２次までの微分値が一致する関数を学びます．

x_iとx_{i+1}の間の近似関数を次のようにします．

$$y(x) = y_i + a_{1i}(x - x_i) + a_{2i}(x - x_i)^2 + a_{3i}(x - x_i)^3$$

このとき，

$$dy/dx = a_{1i} + 2a_{2i}(x - x_i) + 3a_{3i}(x - x_i)^2$$

$$d^2y/dx^2 = 2a_{2i} + 6a_{3i}(x - x_i)$$

となり，$x = x_{i+1}$での接続条件により，

$$y_i + a_{1i}h_i + a_{2i}h_i^2 + a_{3i}h_i^3 = y_{i+1}$$

$$a_{1i}h_i + 2a_{2i}h_i + 3a_{3i}h_i^2 = a_{1(i+1)}$$

$$2a_{2i}h_i + 6a_{3i}h_i = 2a_{2(i+1)}$$

ただし，$h_i = x_{i+1} - x_i$

これより，a_{1i} , a_{2i} , a_{3i}　$i = 1..n-1$（nは離散データ総数）に関する連立１次方程式が導かれますので，これを解きます．

ラグランジェの補間公式...

ラグランジェの補間公式は離散データを補間するものです．式は離散データを通過します．

離散データを$(x_i, f_i), i = 0..n$とすると，近似式を

$$\begin{aligned}L(x) = {} & A_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \\ & + A_1(x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + A_i(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + A_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\end{aligned}$$

とします．

ここで，各係数A_iを求めれば良いわけですが，$x = x_i$で$L(x_i) = f_i$ですので，

$$f_i = A_i(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)$$

となるので，これより，逆に

$$A_i = \frac{f_i}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}_i$$

となります．一般には，次のように表します．

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i f_i$$

$$l_i = \frac{\pi(x)}{(x - x_i)\pi'(x_i)} \quad , \quad \pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$\pi'(x) = d\pi(x)/dx\Big|_{x = x_i}$$

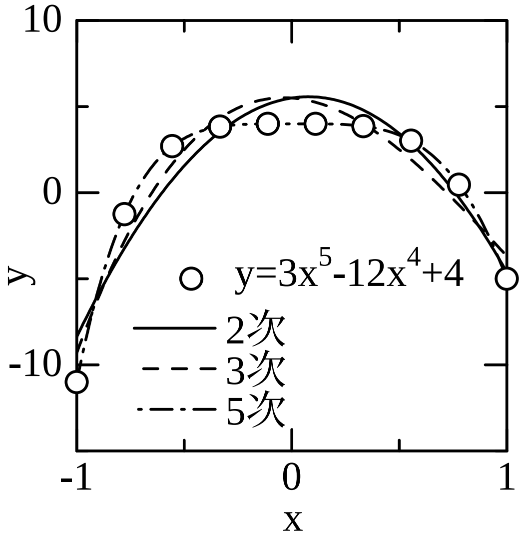


Fig.1 Tchbysev Approximation

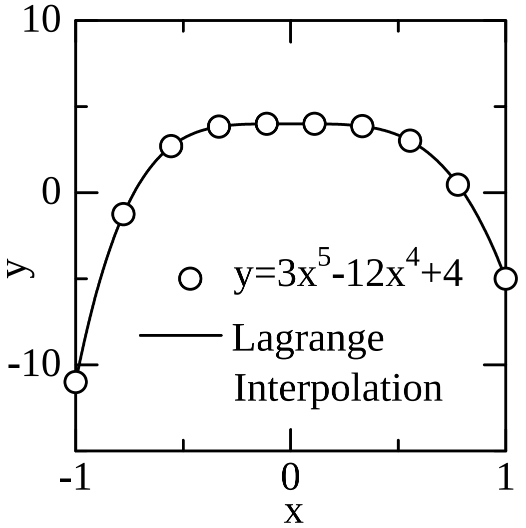


Fig.4 Lagrange Interpolation

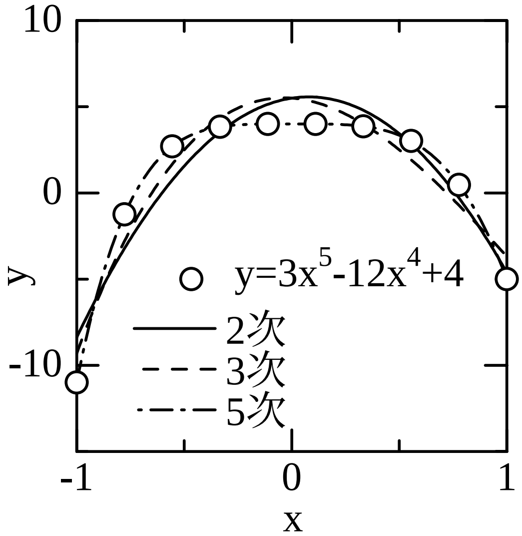


Fig.2 Least Square

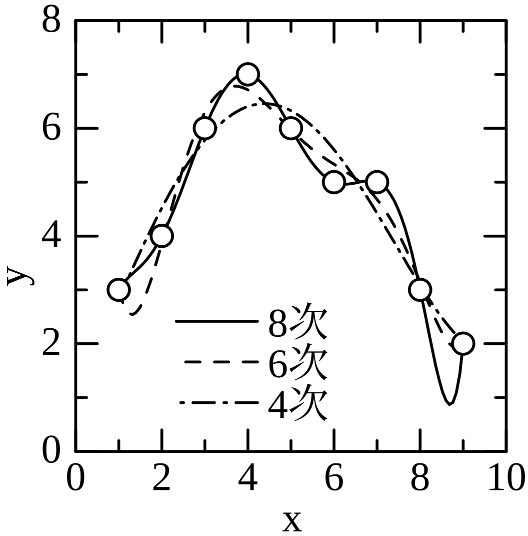


Fig.5 Least Square

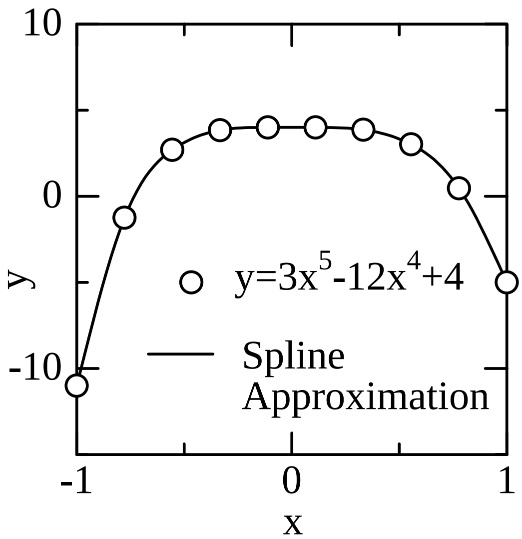


Fig.3 Spline Approximation

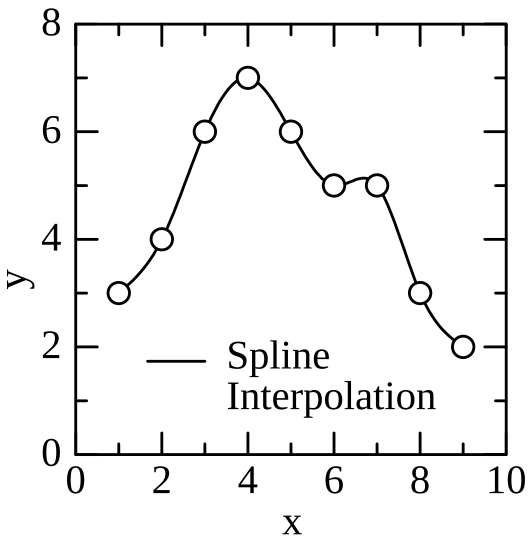


Fig.6 Spline Interpolation