変分問題と有限要素法

汎関数 $I = \int_{x1}^{x2} F(x, y, y')dx$ を極値化...変分問題

Euler Lagrangeの方程式　　　変分問題の近似解法

$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ を解く　　　Ritz近似解 ， Galerkin近似解

<u>逆に</u>

微分方程式 $Lu = f$ の解　　$\Leftrightarrow$　　２次汎関数 $I(u) = (Lu, u) - 2(u, f)$ を極値化

<u>そこで</u>

微分方程式 $Lu = f$　$\Rightarrow$　２次汎関数作成　$\Rightarrow$　Ritz近似解 ， Galerkin近似解

<u>有限要素法は、Ritz or Galerkin近似に用いる近似関数</u>
<u>（試験関数）に区間多項式を用いる方法である。</u>

<u>汎関数（functional）って何？</u>
汎関数は関数の関数。一般には次のかたちで与えられます。

$$I = \int_{x1}^{x2} F(x, y, y')dx$$

変分問題は、いかなる関数 $y(x)$ のときに I が最小（最大）になるかを求める問題です。

<u>２次汎関数（quadratic functional）って何？</u>
微分演算子を L とし、微分方程式を $Lu = f$ と表します。

例　$\frac{d^2u}{dx^2} + \sin u = f$　のとき　$L = \frac{d^2}{dx^2} + \sin$

内積を　$(g, h) = \iiint gh\,dv$　と定義すると
２次汎関数は $I(u) = (Lu, u) - 2(u, f)$

例　$L = \frac{d^2}{dx^2} + \sin$　のとき、$I = \int_1^2 \left\{ \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \sin u \right) u - 2uf \right\} dx$

<u>Ritz近似って何？</u>
汎関数を $I = \int_{x1}^{x2} F(x, y, y')dx$　とするとき、近似関数を　$\tilde{y} = \sum_1^n a_i \Phi_i$　とする。
ここで a_i は係数である。極値の条件により

$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0$　から係数 a_i を求める。