多元連立１次方程式の解法

■ n元連立１次方程式は ■

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

■ マトリックス表示すると ■

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{pmatrix}$$

■ 数値解放の種類 ■

直説法。。　ガウスの消去法
　　　　　　ガウス・ジョルダンの消去法
　　　　　　ＬＵ分解法
反復法。。　ヤコビ法
　　　　　　ガウス・ザイデル法
　　　　　　S.O.R 法

■ ガウスの消去法 ■

ガウスの消去法は係数行列を三角行列に導く方法である。

手順は。。。

１．第 k 行を a_{kk} で割る。

２． $j > k$ なる i 行から k 行の a_{ik} 倍したものを引く

これを式で表すと、

$a_{kj} := a_{kj} / a_{kk}$

$b_k := b_k / a_{kk}$

$a_{ij} := a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$

$b_i := b_i - a_{ik}b_k$

$(i = k+1 \ldots n \ , \ j = k \ldots n)$

これによって、係数行列は三角行列になる。

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ 0 & 1 \cdots\cdots\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{pmatrix}$$

漸化式により

$x_n = b_n$

$x_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n$

$x_k = b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{k,j}x_j$

$(k = n-1 \ldots 1)$

■ 具体的に考察してみると ■

今、$k-1$ 行までの処理が終わったときの係数は

$$\begin{array}{cc} & \text{k -1列} \\ & \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \ldots a_{1,k-1} & a_{1k} \cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ 0 & 1 \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 \ldots & \ldots 1 & a_{k-1,k} \cdots\cdots a_{k-1,n} \\ 0 \cdots & \cdots & \cdots 0 & a_{k,k} \cdots\cdots\cdots a_{k,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots & \cdots & \cdots 0 & a_{k,n} \cdots\cdots\cdots a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_{k-1} \\ x_k \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_{k-1} \\ b_k \\ \\ b_n \end{pmatrix} \end{array}$$

k -1行

■ ガウス・ジョルダンの消去法 ■

ガウス・ジョルダンの消去法は、係数行列を対角行列に導くものである。

手順は。。。

３．第 k 行を a_{kk} で割る。

４．すべての行から k 行の a_{ik} 倍したものを引く

これを式で表すと、

$a_{kj} := a_{kj} / a_{kk}$

$b_k := b_k / a_{kk}$

$a_{ij} := a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$

$b_i := b_i - a_{ik}b_k$

$(i = 1 \ldots n \ , \ j = k \ldots n)$

■ ヤコビ法 ■

次の漸化式により反復計算を行う。

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

■ ガウス法 ■

次の漸化式により反復計算を行う。

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

■ S。O。R.法 ■

次の漸化式により反復計算を行う。

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega\left\{ \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right) - x_i^{(k)} \right\}$$

ここで、ω は加速（緩和）係数で　$0-2$