

メカを動かす基本法則

仙台市地域連携フェロー

熊谷 正朗

kumagai@tjcc.tohoku-gakuin.ac.jp

東北学院大学工学部
 ロボット開発工学研究室 RDE

今回の目的

○ メカを理解するための法則の基礎

テーマ1: 個々の概念の解説

- ・基本法則と単位
- ・運動の法則
- ・力、仕事、エネルギー

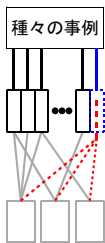
テーマ2: 具体事例にみる法則の適用

- ・台形加減速の意義と計算
- ・車輪走行ロボットの動力計算
- ・バドミントン練習ロボットの運動計算

基本法則の理解・再確認

○ シンプルなルールで多くを説明

◇基本法則の特徴

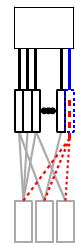


- ・なるべく少ないルールの組み合わせ
- ・実は、「理解すべきこと」は少ない。
- ・個々の状況ごとの説明ではないため、「調べても見つからない」型トラブルが発生しにくい。
- ※考えてもわからない、はあり得る

基本法則の理解・再確認

○ 個別の専用計算式 VS 基本法則

◇専用計算式



- 指定の数値を入れれば、**答えが出る**。
- △ 少しでも形式が外れると使いにくい。
- × 間違った**条件**で使うと大きな差異。

◇基本法則

- 適用方法を理解すれば、**多くの応用**。
- 新しいアイデアも検討しやすい。
- × 本質を理解して、計算を積み上げる手間。

基本法則のための単位

○ 国際単位系 (SI単位系)

◇7種の**基本単位** : すべての単位の元

- ・時間 [s, 秒]
- ・長さ [m, メートル]
- ・質量 [kg, キログラム]
- ・電流 [A, アンペア]
- ・熱力学温度 [K, ケルビン]
- ・物質質量 [mol, モル]
- ・光度 [cd, カンデラ]

基本法則のための単位

○ SI組立単位

◇**定義に従い**基本単位の**組み合わせ**で構成

- ・面積 [m², 平方メートル]
- ・体積 [m³, 立方メートル]
- ・速さ [m/s, メートル毎秒]
- ・密度 [kg/m³, kg毎立方メートル]

◇専用の名称がある場合の例

- ・力 [kgm/s²] = [N, ニュートン]
- ・圧力 [N/m²] = [Pa, パスカル]

基本法則のための単位

○ SI接頭辞 (接頭語)

◇単位の**桁を変える** (10⁻²⁴~10²⁴)

- ・km = 1000m, mm = 0.001m

◇よく使う接頭辞

- ・k (キロ)=10³=1000倍
- ・M (メガ)=10⁶=100万倍
- ・m (ミリ)=10⁻³=1000分の1, 0.001
- ・μ, u (マイクロ)=10⁻⁶=100万分の1 0.000001

基本法則のための単位

○ SI接頭辞 (接頭語)

◇よく使う接頭辞

- ・k, M, m, μ (u)
- ・da (デカ) = 10¹ = 10 ・d (デシ) = 10⁻¹ = 0.1
- ・h (ヘクト) = 10² = 100 ・c (センチ) = 10⁻² = 0.01
- ・G (ギガ) = 10⁹ = 10億 ・n (ナノ) = 10⁻⁹
- ・T (テラ) = 10¹² = 1兆 ・p (ピコ) = 10⁻¹²

◇使用例

- hPa(ヘクトパスカル), ha(ヘクター), dB(デシベル), daN(デカニュートン), [dl, cl, ml, ul, pl : リットル]

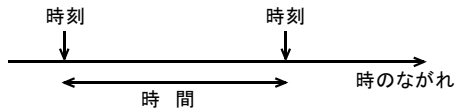
基本法則のための単位

- 基本法則を使うときは接頭辞なしで
 - ◇単位は「へんな係数」が不要な定義
 - ・力 $1[\text{N}] = \text{質量 } 1[\text{kg}] \times \text{加速度 } 1[\text{m/s}^2]$
 - ◇接頭辞の混乱を避けられる
 - ・電力 $1[\text{W}] = \text{電圧 } 1[\text{V}] \times \text{電流 } 1[\text{A}]$
 - $1[\text{mV}] \times 1[\text{mA}] = ? \quad 1[\text{mW}]? \times \text{NG}$
 - $10^{-3}[\text{V}] \times 10^{-3}[\text{A}] = 10^{-6}[\text{W}] (=1[\mu\text{W}])$
 - ◇日常的な単位の換算
 - ・時、分→秒　度、分、秒(、回転)→ラジアン

用語・単位・解説

- 質量と重量
 - ◇質量 $[\text{kg}]$
 - ・ある意味、「重さ」
 - ・物体の動きにくさなどを表す数値
 - ・万有引力の大きさに影響する数値
 - ・上皿天秤で測定される。
 - ◇重量 $[\text{N}]$ $[\text{kgf}]$ ※力であって、 $[\text{kg}]$ ではない
 - ・物体が地球に引かれる力の大きさ
 - ・バネばかりで測定される。

用語・単位・解説

- 時間と時刻
 - ◇時刻 $[\text{s}]$
 - ・時の流れの中の一点を指す
 - ◇時間 $[\text{s}]$
 - ・時刻と時刻の間隔
- 

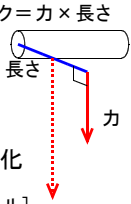
用語・単位・解説

- 運動関係 (直線運動) ※単位 $\circ\circ=1$
 - ◇速さ・速度 $[\text{m/s}]$
 - ・単位時間あたりの移動距離、位置の変化
 - ・「速度」というと、方向を含む解釈がある。
 - ◇加速度 $[\text{m/s}^2]$ $([(\text{m/s})/\text{s}])$
 - ・単位時間あたりの速度の変化
 - ◇力 $[\text{N} = \text{kg m/s}^2]$ ※[ニュートン]
 - ・後述の運動の法則によって定義

用語・単位・解説

- 運動関係 (回転運動)
 - ◇角度 $[\text{rad}, \text{ラジアン}]$ ※日常では度(deg)
 - ・ $360\text{度} = 2\pi\text{ラジアン}$ ($\pi = \text{円周率}$, 約3.14)
 - ・数値は半端ながら、法則がすっきりする。
 - ・ $[\text{rad}]$ は「比」なので、本来は $[\text{m/m}]$ 。
 - ・そのため、 $[\text{rad}]$ が消えることがある。
 - ◇角速度 $[\text{rad/s}]$ ※deg/sもよく使われる
 - ・単位時間あたりの角度変化

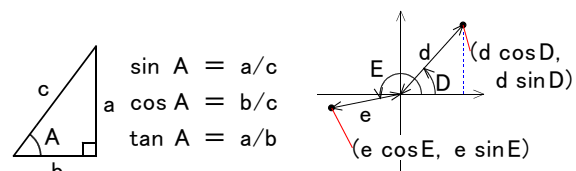
用語・単位・解説

- 運動関係 (回転運動)
 - ◇角度 $[\text{rad}, \text{ラジアン}]$
 - ◇角速度 $[\text{rad/s}]$
 - ◇角加速度 $[\text{rad/s}^2]$
 - ・単位時間あたりの角速度の変化
 - ◇トルク $[\text{Nm}]$ ※[ニュートンメートル]
 - ・軸などを回転させる力 = 力 × 長さ
 - ◇慣性モーメント $[\text{kgm}^2]$
 - ・回転における質量にあたるもの(後述)
- 

用語・単位・解説

- 運動と数学
 - ◇(時間で)微分
 - ・瞬間ごとの時間変化を求めることに相当。
 - 位置を時間微分 → 時々刻々の速度
 - 速度を時間微分 → 時々刻々の加速度
 - ◇(時間で)積分
 - ・微分の反対の作業
 - ・角速度を時間積分 → 角度
 - ※実際には「積分した範囲での変化を積算したもの」

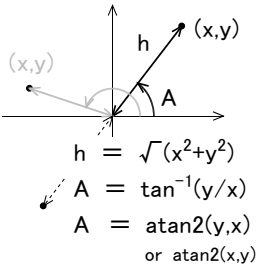
用語・単位・解説

- 三角関数
 - ◇角度と座標の関係を表せる
 - ・sin(正弦)、cos(余弦)、tan(正接)
 - ・および逆関数 \sin^{-1} 、 \cos^{-1} 、 \tan^{-1} (atan)
- 

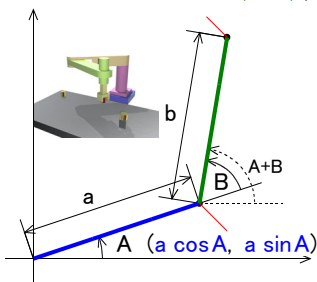
用語・単位・解説

○ 三角関数

◇ 応用例



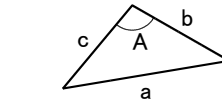
$$(a \cos A + b \cos(A+B), a \sin A + b \sin(A+B))$$



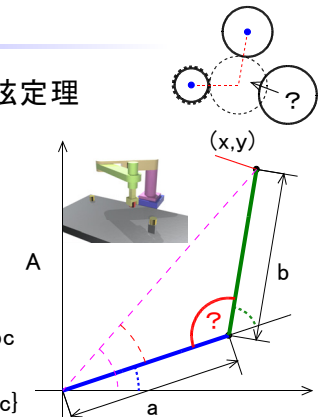
用語・単位・解説

○ 三角関数: 余弦定理

◇ 3辺と角度



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc$
- $A = \cos^{-1}\{(b^2 + c^2 - a^2) / 2bc\}$



運動の法則

○ 物体の運動の基本 (※身の回りレベルで)

◇ 1: 慣性の法則

・外部から力がかからなければ、**速度不変**
 ※静止している→静止のまま、移動中→等速直線運動

◇ 2: 運動の法則

・物体が**力を受けると加速度**が生じる。
 ・加速度は**力に比例し、質量に反比例**

◇ 3: 作用反作用の法則

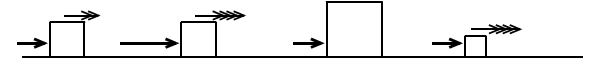
・力を作用させると、**逆方向に力**を受ける。

運動の法則

○ 運動の第2法則

◇ 加速度は力に比例、質量に反比例

- ・力が大きいほど加速する。
- ・質量が大きい(≒重い)ほど、加速しにくい。
- ・加速しにくい = (一般的表現で)減速しにくい。
- ・(加速度) = (力) ÷ (質量)
 → (力) = (質量) × (加速度)
 → **$f = ma$**



運動の法則 回転の場合

○ 直線の場合との類似性

◇ある軸周りに回転しているものは、外部からの作用がなければ、**角速度は維持**される。

◇**軸にトルク**が作用する場合、**角加速度**が生じる。

- ・トルクに**比例し、慣性モーメントに反比例**
- ・トルク [Nm] = 慣性モーメント [kgm²] × 角加速度 [rad/s²]

$$\text{※} [\text{kgm}^2 \times \text{rad/s}^2] = [\text{kgm}^2/\text{s}^2] = [\text{kgm/s}^2 \cdot \text{m}] = [\text{Nm}]$$

※明確に運動の軸がない場合はかなり複雑

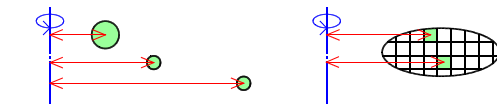
運動の法則 回転の場合

○ 慣性モーメント

◇回転の質量にあたる量

◇定義・計算

- ・軸周りに回転するものを細切れにする
 → (小片の質量) × (軸からの半径)²
 → すべてを合計する



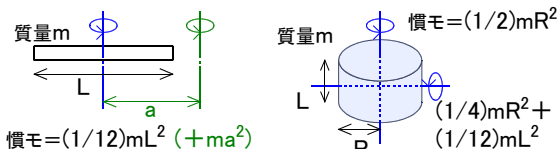
運動の法則 回転の場合

○ 慣性モーメント

◇回転の質量にあたる量

◇定義・計算

- ・棒、円筒や直方体など、主要な物体の慣性モーメントは計算式がある。



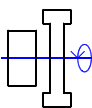
運動の法則 回転の場合

○ 慣性モーメント

◇回転の質量にあたる量

◇性質

- ・小さいほど、回転の加減速がしやすい
 → 急峻な動きをするものは小さく
 ※これは直線運動の質量と同じ
- ・大きいほど、回転の変動が少ない
 → はずみ車などの用途
 → 同質量なら外周に寄せる

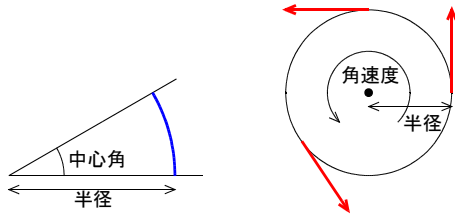


回転運動と直線運動

○ 図形的関係

◇ 円弧の長さ[m] = 半径[m] × 中心角[rad]

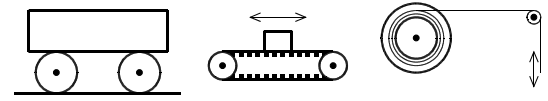
◇ 周速度[m/s] = 半径[m] × 角速度[rad/s]



回転運動と直線運動

○ 使用例

◇ 円弧の長さ[m] = 半径[m] × 中心角[rad]
 ◇ 周速度[m/s] = 半径[m] × 角速度[rad/s]



車輪の回転と
車両の移動距離/速度

ベルトものの
速度の計算

ワイヤドラムの
回転と送り速度

物体に作用する力 重力

○ 重力

◇ メカトロで最も大きな影響を持つ力

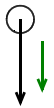
◇ 計算式

重力[N] = 質量[kg] × 重力加速度[m/s²]

$f = mg$

◇ 重力加速度

- ・「重力(重量)は質量に比例する」の比例係数。結果的に加速度の単位に。
- ・約9.8 ~ 地域によって異なる



物体に作用する力 重力

○ 重力加速度の正体

◇ 万有引力 $f = GMm/R^2$

1 2

・ (万有引力定数) × (物体1の質量) × (物体2の質量) ÷ (物体1、2間の距離)²

物体

・ (定数) × (地球質量) × (物体質量) ÷ (地球半径)²

= (物体質量) × ((定数) × (地球質量) × (半径)²)

= (物体質量) × (万有引力による加速度)

地球

物体に作用する力 重力

○ 重力加速度の正体

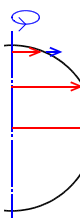
◇ 万有引力

- ・ 足下の組成などで微妙に変わる

◇ 遠心力

- ・ 地球の自転に伴う遠心力 = 赤道で大
- ・ (質量) × (半径) × (角速度)²
- = (質量) × ((半径) × (角速度)²)
- = (質量) × (遠心力による加速度)

◇ 主にこれらの合計



物体に作用する力 摩擦力

○ 接触面に働く力

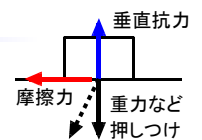
◇ 大きさ

(最大で) 摩擦係数 × 垂直抗力

垂直抗力 = 接触面を(から)垂直に押しつけ
 斜め方向の力の場合、垂直な分のみ

◇ 方向

- ・ 滑っていない場合: その他の力の反対
- ・ 滑っている場合: 運動方向と反対



物体に作用する力 摩擦力

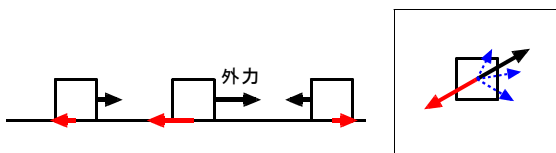
○ 静摩擦力

◇ 大きさ

【最大で】静摩擦係数 × 垂直抗力

◇ 方向

- ・ その他の力の合計 の 反対方向



物体に作用する力 摩擦力

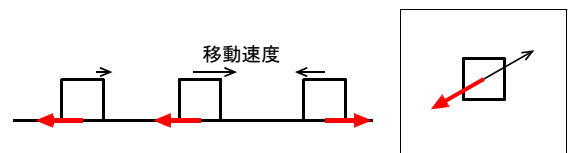
○ 動摩擦力

◇ 大きさ

動摩擦係数 × 垂直抗力 (速さによらない)

◇ 方向

- ・ 運動の反対方向

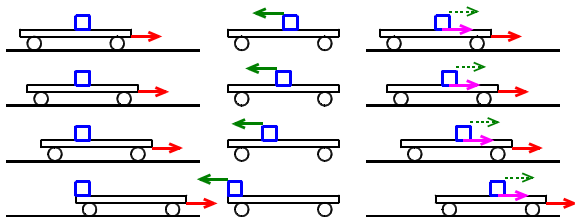


物体に作用する力 慣性力と遠心力

○ 周りの動きにより生じる見かけの力

◇ 慣性力の例

- ・ 周りが動くから / 周りと共に動くには

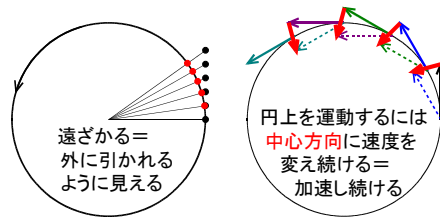


物体に作用する力 慣性力と遠心力

○ 周りの動きにより生じる見かけの力

◇ 遠心力・向心力

- ・ 円軌道 VS 慣性による直進

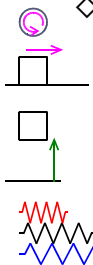


仕事とエネルギー

○ エネルギー [J]=[Nm]

◇ 物理的に仕事できる能力

- ・ 運動エネルギー
速度をもつ物体が持つ
- ・ 重力による位置エネルギー
高いところにある物体が持つ
- ・ バネによる位置エネルギー
伸びた/縮んだバネが持つ
- ・ 他: 熱、化学、電気他



仕事とエネルギー

○ 力学的な仕事 [J]=[Nm]

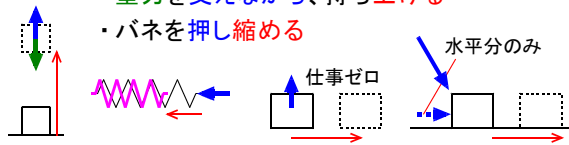
◇ 計算:

$$\text{作用する力[N]} \times \text{移動距離[m]}$$

※方向が一致しない場合は一致する分を計算

◇ 例:

- ・ 重力を支えながら、持ち上げる
- ・ バネを押し縮める



仕事とエネルギー

○ エネルギー

◇ 物理的に仕事できる能力 [J]=[Nm]

◇ エネルギーと仕事

- ・ 他者への仕事
→ エネルギーが減少
※速度減、位置低下、バネ緩む
- ・ 他者から仕事を受ける
→ エネルギーが増加する
※速度増、位置上昇、バネ変形

仕事とエネルギー

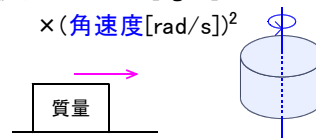
○ 運動エネルギー

◇ 直線運動

$$(1/2)(\text{質量[kg]}) \times (\text{速度[m/s]})^2$$

◇ 回転運動

$$(1/2)(\text{慣性モーメント[kgm}^2\text{]}) \times (\text{角速度[rad/s]})^2$$



仕事とエネルギー

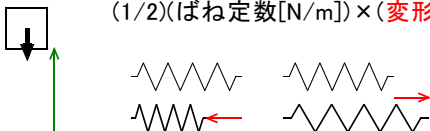
○ 位置エネルギー

◇ 重力による位置エネルギー

$$(\text{重力[N]}) \times (\text{基準からの高さ[m]}) = (\text{質量[kg]}) \times (\text{重力加速度[m/s}^2\text{]}) \times (\text{高さ[m]})$$

◇ バネの変形による位置エネルギー

$$(1/2)(\text{ばね定数[N/m]}) \times (\text{変形量[m]})^2$$

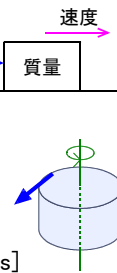


仕事とエネルギー

○ 動力・仕事率

◇ 単位時間あたりの仕事

$$\begin{aligned} \text{仕事率} \cdot \text{動力 [W = J/s = Nm/s]} \\ &= \text{仕事[J (Nm)]} \div \text{時間[s]} \\ &= \text{力[N]} \times \text{移動速度[m/s]} \\ &= \text{トルク[Nm]} \times \text{角速度[rad/s]} \end{aligned}$$



◇ 動力と電力

- ・ 効率100%のアクチュエータに入れた電力[W] は そのまま 出力動力[W] に

仕事とエネルギー

○ エネルギー・動力計算の活用

◇事例：バネの大きさ計算

- ・目的：ある速度の物体を受け止めて、反対方向に押し返すバネの選定する。



- ・運動エネルギーを計算する。



- ・圧縮のストロークを仮に定めて、運動エネルギーに対応するばね定数を計算。



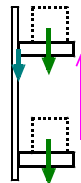
- ・ばね定数とストロークからばねを選定 →ストロークの調整

仕事とエネルギー

○ エネルギー・動力計算の活用

◇事例：エレベータ機構のモータ

- ・可動部分の質量を算出する。
 - ・重力と摩擦力などを見積もる。
 - ・可動部分の仕様速度を定める。
 - ・動力[W] = 重力など[N] × 速度[m/s] が、モータに要求される動力。
 - ・ある程度の係数をかければ消費電力。
- ※減速機は損失を無視すれば動力変わらず



法則の適用事例

○ 具体的な計算例

◇台形加減速・S字加減速

- ・なにのために必要か
- ・台形加減速の計算

◇車輪走行ロボットの動力計算

- ・力の見積とモータ、減速比の検討

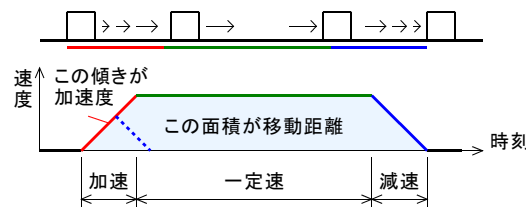
◇バドミントン練習ロボットの運動計算

- ・回転部分の設計概念
- ・慣性モーメントの計算とモータの回転

台形加減速

○ 台形加減速とは？

- ◇一定速度の運動の前後に、加速・減速区間
- ◇直線運動でも回転運動でも用いる

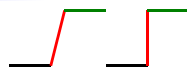


台形加減速

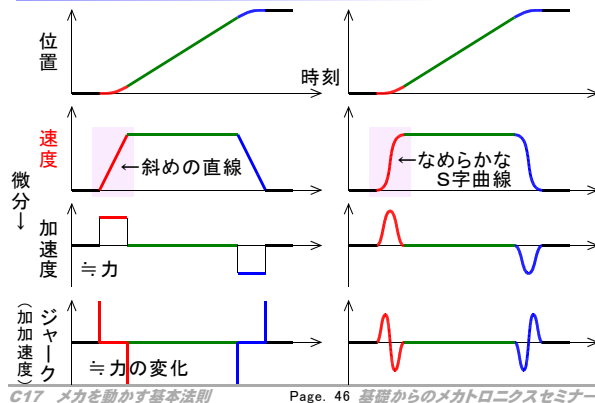
○ 加減速動作の目的

◇慣性力の低減

- ・もしも、いきなり目標速度を出したら？
→ 速度が短時間で急に変化する
→ 加速度が大きい = 大きな力が必要
- ・敢えて、加速度を押さえることで、適切に加速の力を低減する。
- ・DC、ACモータ：加速時の不安定さを低減
- ・ステッピングモータ：脱調防止



台形加減速とS字加減速



台形加減速とS字加減速

○ 加速度の時間変化の比較

◇ジャーク（躍度、加加速度）

- ・加速度の微分(時間変化)
≡ 各部にかかる力の時間変化

◇比較

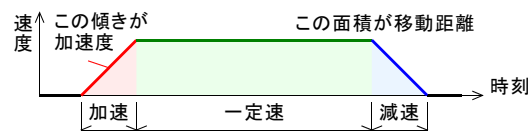
- ・加速度：台形は一定、S字は変化
- ・ジャーク：台形はスパイク状、Sは滑らか
→ 台形は急な変化で振動誘発
※乗り心地の悪さも類似の現象

台形加減速

高級なコントローラでは自動計算してくれる

○ 台形加減速の計算

- ・加速度を決める（トルクなどから）
- ・加減速部の面積を求めると移動量
- ・目標の移動距離からこれを引いて、一定速度で移動する時間を計算する。



車輪移動ロボットの動力計算

○ 目標仕様

◇車体質量 搭載物込み

100[kg]

◆移動速度

1 [m/s]程度

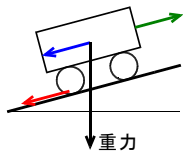
◆ある程度の傾斜を走れる

傾斜 15[deg]

◆ある程度の悪路を走れる

走行抵抗係数 0.2

※摩擦と似た扱い



車輪移動ロボットの動力計算

○ 必要な推進力の計算

◇車体質量 搭載物込み 100[kg]

◆傾斜15[deg]で受ける重力

$$100 \times 9.8 \times \sin(15\text{deg}) \approx 250[\text{N}]$$

◆走行抵抗、係数 0.2

$$100 \times 9.8 \times 0.2 \approx 200[\text{N}]$$

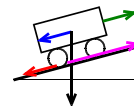
※15deg斜面であれば、「 $1 \times \cos(15\text{deg})$ 」だが大きな差はない

◆走行に必要な推進力

$$250 + 200 = 450[\text{N}]$$

※駆動に必要な車輪の摩擦力は考慮していない

※ただし、加減速に必要な分は含まれず



車輪移動ロボットの動力計算

○ 必要な動力の計算

◆移動速度 1[m/s]

◆走行に必要な推進力 450[N]

◇動力=速度×力 = $1 \times 450 = 450[\text{W}]$

→ 計算上は定格500[W]程度のモータ

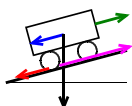
【注】簡単のためメカ効率100%

◇モータの例:

山洋電気 直流サーボモータ T850

定格トルク 1.76[Nm]

定格回転 2500[rpm]



車輪移動ロボットの動力計算

○ 必要な減速比の計算

◆移動速度 1[m/s] ◆推進力 450[N]

◇モータ トルク 1.76[Nm]、回転 2500[rpm]

◇タイヤ径を300[mm]とすると、回転速度は

$$1[\text{m/s}] \div 0.15[\text{m}] = 6.67 [\text{rad/s}]$$

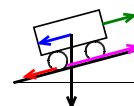
※秒1回転強

◆減速比

$$2500[\text{rpm}] \rightarrow 2500 \div 60 = 41.7[\text{rps}]$$

$$\rightarrow 41.7 \times 2 \times 3.14 = 261.7[\text{rad/s}]$$

$$6.67[\text{rad/s}] \div 261.7[\text{rad/s}] \approx 1/39$$



車輪移動ロボットの動力計算

○ 減速比の確認

(◇仕様 1[m/s] 推進力 450[N]) タイヤ300[mm]

◇モータ 1.76[Nm] 2500[rpm] ◇減速比 1/39

◇車輪の回転速度、トルク

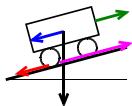
$$2500[\text{rpm}] \div 39 = 64.1[\text{rpm}] = 6.71[\text{rad/s}]$$

$$1.76[\text{Nm}] \times 39 = 68.6[\text{Nm}] \quad \text{※効率100\%}$$

◇車輪の速度、推進力

$$6.71 \times 0.15 = 1.01[\text{m/s}] > 1[\text{m/s}] \quad \text{OK}$$

$$68.6 \div 0.15 = 457[\text{N}] > 450[\text{N}] \quad \text{OK}$$



車輪移動ロボットの動力計算

○ 計算の方針

・必ずSI単位、倍数なしに直す。

※特に、[rpm]

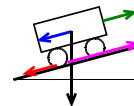
・必要な動力を計算 → モータを選定

※一般には効率による目減りを加味

・減速比を「速度」でほぼ正確に決定。

※モータ動力の余裕は全てトルクに

・減速比から再計算して、チェックする。



バドミントン練習ロボット →C14

○ ロボットの概要

◇ロボットの用途

・バドミントン用の「ピッチングマシン」

・一人での練習用に

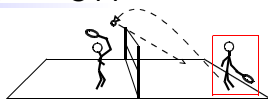
◇装置の方針

・ラケットをモータ1軸で回転、

羽根を飛ばす。

・タイミング制御のために、

1回ごとに加速・減速・停止。



バドミントン練習ロボット

○ 機構部の検討

◇ポイント

・高速回転するので、重心を回転軸上に乗せる。

※ずれていると振動発生

・加速・減速のために、慣性モーメントをなるべく小さく押さえる。

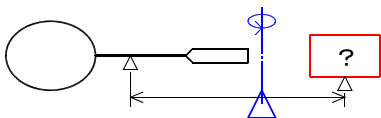


バドミントン練習ロボット



○ 重心のバランス

◇ 釣り合い錘



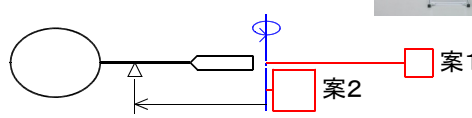
- ・ 重心を回転軸上に。 → 調整可能な設計
- ・ 固定金具やネジ類も影響する。
- ・ 釣り合い錘の質量と位置には決定の余地：
 $(位置) \times (質量)$ のみが計算で決まる。

バドミントン練習ロボット



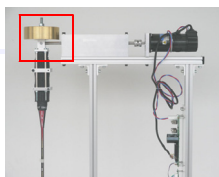
○ 錘の位置の検討

◇ 慣性モーメントの最小化



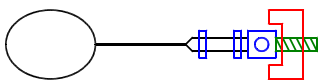
- ・ ラケット等から釣り合い錘の $(質量) \times (位置)$ 決定
- ・ 案1: 小さい錘を遠くに → 全体は軽くなる
- ・ 案2: 大きな錘を近くに → 慣性モ小さくなる

バドミントン練習ロボット



○ 機構部の検討

◇ 最終決定案

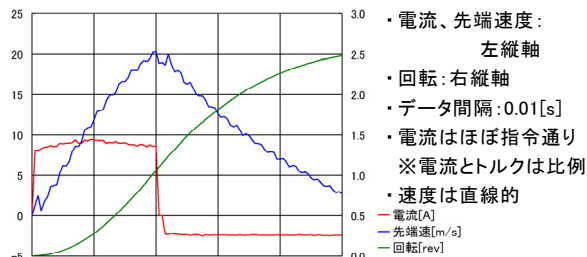


- ・ 回転軸およびラケット固定部
 - ・ 釣り合い錘
 - ・ 錘調整用ねじ
- ※ 腕の長さも短い方が有利(回転速度は上がる)

バドミントン練習ロボット

○ 動作時のデータ

◇ 一振りする間の状態変化



まとめ

○ 基本法則

- ・ さまざまな機械の動作を説明するために必要な法則は、実はそれほど多くない。
- ・ SI単位は、法則を基にして構築しており、SI単位を使えば途中の計算がすっきり。
- ・ 機械の理解には、運動の法則と、対象に作用する力を把握することが重要。
- ・ エネルギー・仕事・動力は、実用的な計算に便利である。

まとめ

○ 基本法則 と 目的別の計算用の数式

- ・ 選定ガイドなどにある計算式は、基本法則から導き出された結果の式、もしくは簡易式である。
- ・ 目的ごとの計算用の数式は便利であるが、用途限定で、目的に応じてそれぞれ必要。
- ・ 基本法則の活用に慣れると、多少手間は多いが、適用範囲はアイデア次第。