

機械知能工学科

工学総合演習Ⅱ・制御メカトロ

EP-05/Rev 15-1.0

第K05回

# 制御・電子回路への ラプラス変換の応用

工学部 機械知能工学科

熊谷 正 朗

[kumagai@mail.tohoku-gakuin.ac.jp](mailto:kumagai@mail.tohoku-gakuin.ac.jp)

東北学院大学工学部  
ロボット開発工学研究室

**RDE**

# 今回の到達目標

---

## ○ラプラス変換による制御メカトロ解析

### ◇ラプラス変換の制御メカトロでの有用性

を説明できる。

- ・制御対象、運動方程式の変換
- ・コンデンサ、コイルの抵抗との統合

### ◇基本的なラプラス変換、

および複素数計算ができる。

### ◇ラプラス変換を用いた周波数応答

の計算ができる。

# ラプラス変換

## ○微分を文字にできる変換

◇ラプラス変換、逆変換の数学的計算: スキップ

◇計算済みの表を用いた変換、逆変換

- $1 \Leftrightarrow (1/s)$ 、 $t \Leftrightarrow (1/s^2)$ 、 $e^{-at} \Leftrightarrow 1/(s+a)$
- $\cos(\omega t) \Leftrightarrow s/(s^2+\omega^2)$        $a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \Leftrightarrow$
- $\sin(\omega t) \Leftrightarrow \omega/(s^2+\omega^2)$        $a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$
- $\sin(\omega t + \phi) \Leftrightarrow (s \sin \phi + \omega \cos \phi)/(s^2+\omega^2)$

◇ $f(t) \rightarrow F(s)$  のとき、 $df(t)/dt \rightarrow sF(s) - f(0)$

- 時間微分  $\rightarrow s$  をかける      ※初期値ゼロ

# ラプラス変換の活用

## ○微分方程式のs多項式化

### ◇運動方程式の変換

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow ms^2 X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s)$$

$$\rightarrow (ms^2 + cs + k) X(s) = F(s)$$

### ◇伝達関数: ラプラス変換表記での入力→出力

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

# ラプラス変換の活用

## ○制御工学とラプラス変換

### ◇古典制御理論の基本表現

- 伝達関数 ← システムの微分方程式
- 周波数応答
- ボード線図
- 安定判別
- ラウス・フルビッツの方法
- ナイキスト線図・根軌跡法

# ラプラス変換の活用

## ○電子回路とラプラス変換

→特性はMB06

### ◇抵抗・コンデンサ・コイルの統一表現

$$\cdot e(t) = R i(t) \quad \Rightarrow \quad E(s) = R I(s)$$

$$\cdot e(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad \Rightarrow \quad E(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

$$\cdot e(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad E(s) = Ls I(s)$$

$$\cdot \text{全て } E(s) = ? I(s) \text{ の形}$$

→  $Z(s) = E(s)/I(s)$  とすると抵抗と同型

# ラプラス変換の活用

## ○インピーダンスの計算

◇インピーダンス  $Z(j\omega)$  [ $\Omega$ ] j: 虚数単位

- ・ 抵抗:  $R$  コンデンサ:  $1/Cs$  コイル:  $Ls \rightarrow$
- ・ 抵抗:  $R$  コンデンサ:  $1/j\omega C$  コイル:  $j\omega L$   
 $\omega = 2\pi f$  : 角周波数[rad/s]  $f$ : 周波数[Hz]
- ・ 抵抗と同じように計算できる  
例) 直列合成、並列合成、分圧  
直:  $Z = Z_1 + Z_2$  並:  $Z = (Z_1 Z_2) / (Z_1 + Z_2)$
- ・ オペアンプによる回路もインピーダンスでOK

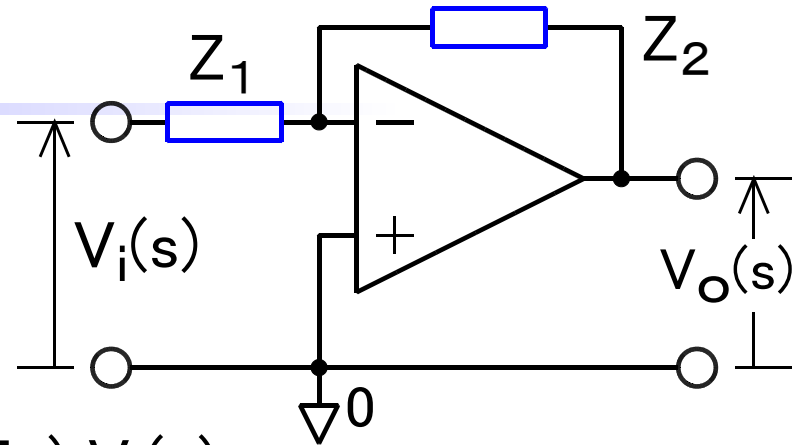
# ラプラス変換の活用

## ○反転増幅型回路

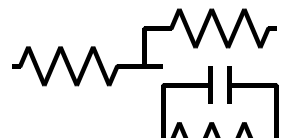
◇式は同じ形

$$\bullet V_o(s) = -(Z_2/Z_1) V_i(s)$$

$$\rightarrow \text{伝達関数 } G(s) = V_o(s)/V_i(s) = -Z_2/Z_1$$



◇組み合わせと回路



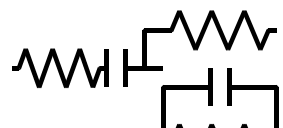
$$\bullet Z_1 = R_1 \quad Z_2 = R_2$$

→ 反転増幅



$$\bullet Z_1 = R_1 \quad Z_2 = R_2 // C$$

→ ローパスフィルタ



$$\bullet Z_1 = R_1 + C \quad Z_2 = R_2$$

→ ハイパスフィルタ



$$\bullet Z_1 = R_1 + C \quad Z_2 = R_2 // C$$

→ バンドパスF



# 周波数応答

$$\bigcirc G(j\omega) = G(2\pi f j)$$

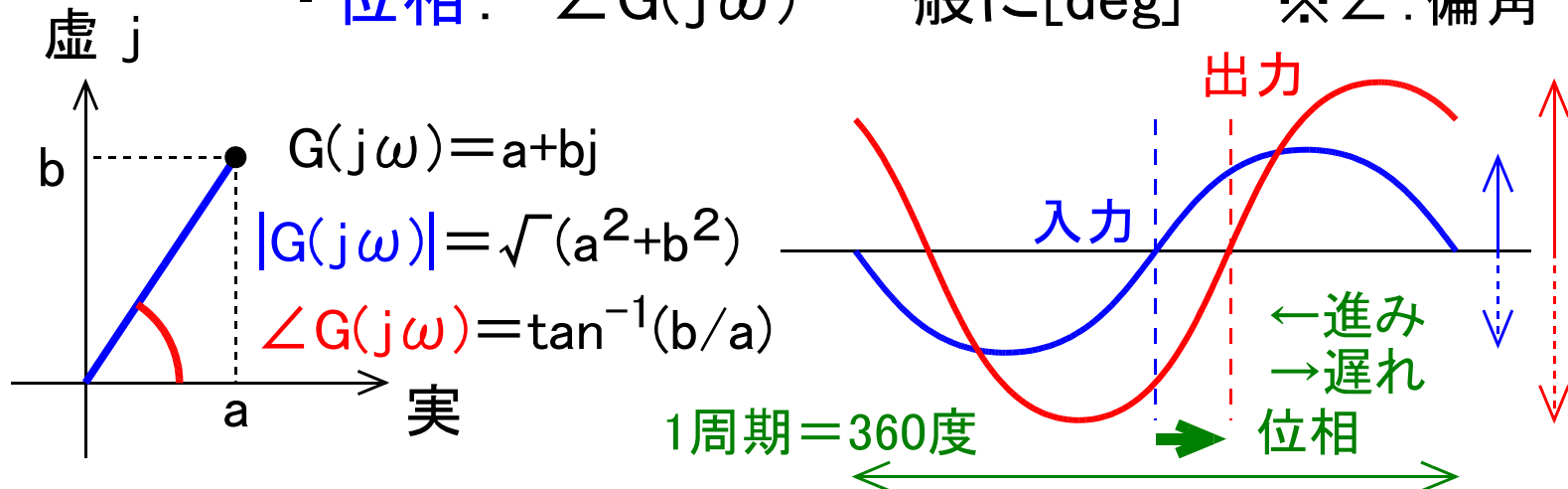
→ 復習: MB07

◇ ある周波数  $f$  における特性 を周波数に対して

・ 増幅率:  $|G(j\omega)|$  = 出力振幅 ÷ 入力振幅

→ ゲイン:  $20 \log_{10} |G(j\omega)|$  [dB]

・ 位相:  $\angle G(j\omega)$  一般に [deg] ※  $\angle$ : 偏角

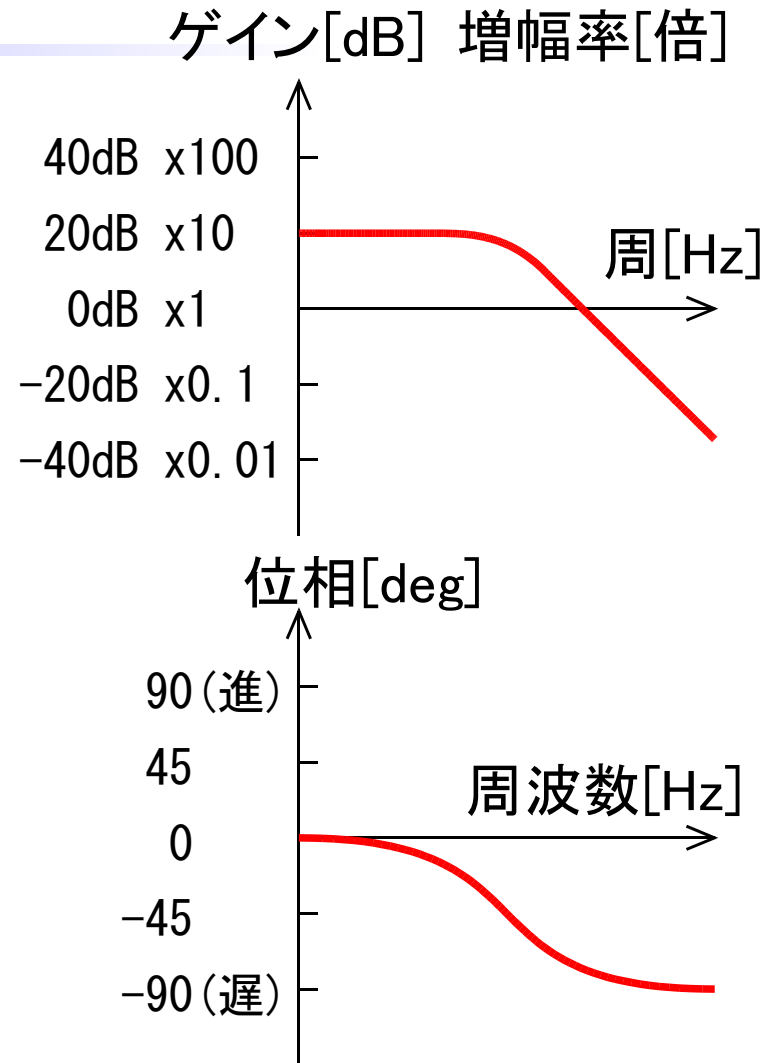


# 周波数応答

## ○ボード線図

◇周波数に対する  
特性のグラフ

- 増幅率:  $|G(j\omega)|$   
ゲイン [dB]
- 位相:  $\angle G(j\omega)$
- 横軸周波数は  
対数が一般的



# 周波数応答

## ○複素数の計算

◇四則演算類：略

◇大きさ、偏角：前述

◇  $\frac{a+bj}{c+dj} = \frac{(a+bj)(c-dj)}{(c+dj)(c-dj)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)j}{c^2 + d^2}$

有理化

◇積、商の大きさと偏角： $G=(a+bj)$   $H=(c+dj)$

・  $|GH|=|G| \cdot |H|$   $\angle(GH)=\angle G + \angle H$

・  $|G/H|=|G| / |H|$   $\angle(G/H)=\angle G - \angle H$

◇Excelを使う場合：複素数関数群

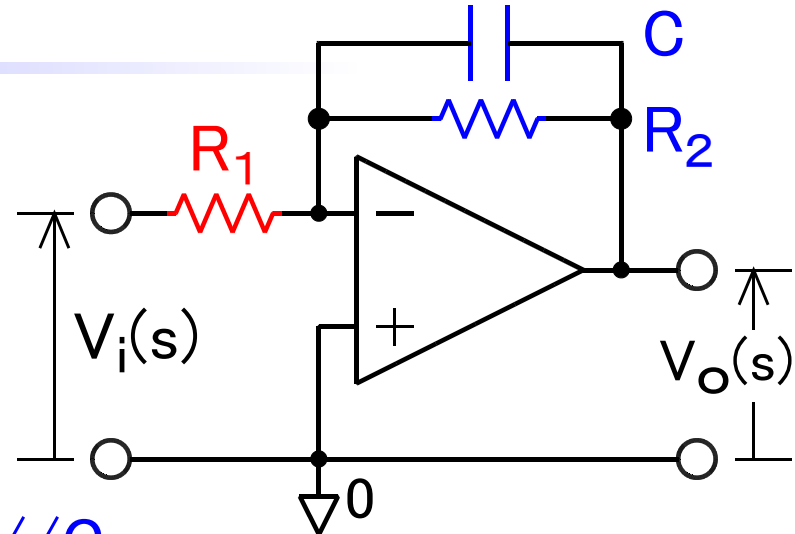
IMPRODUCT IMABS IMARGUMENT 等

# 周波数応答

## ○1次ローパスF

$$\begin{aligned}\diamond G(s) &= V_o(s)/V_i(s) \\ &= -(Z_2/Z_1)\end{aligned}$$

$$Z_1 = R_1 \quad Z_2 = R_2 // C$$



$$\cdot R_2 // C = \frac{R_2(1/j\omega C)}{R_2 + (1/j\omega C)} = \frac{R_2}{j\omega CR_2 + 1}$$

$$\cdot G(s) =$$

$$-\frac{R_2}{R_1(j\omega CR_2 + 1)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega CR_2}$$

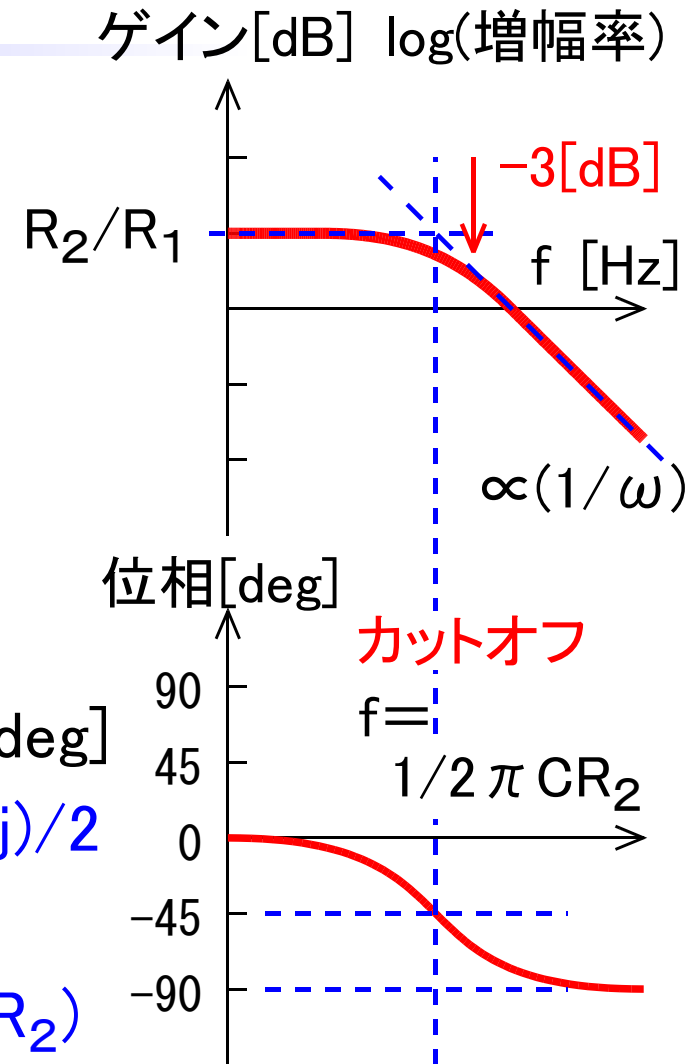
# 周波数応答：ローパスF

$$\diamond G(s) = - \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega CR_2}$$

反転・増幅・ローパス特性

## ◇ローパス特性部

- ・  $\omega \rightarrow \text{小} \quad \doteq 1 \quad (1/1+0)$
- ・  $\omega \rightarrow \text{大} \quad \doteq 1/(j\omega CR_2)$   
 $| | = 1/(\omega CR_2) \quad \angle = -90[\text{deg}]$
- ・  $1 = \omega CR_2 \rightarrow 1/(1+j) = (1-j)/2$   
 $| | = \sqrt{2}/2 \quad \angle = -45[\text{deg}]$   
 $1 = 2\pi f CR_2, f = 1/(2\pi CR_2)$



# フィルタ回路の設計

## ○ローパスフィルタ

◇フィルタの選択

◇特性式

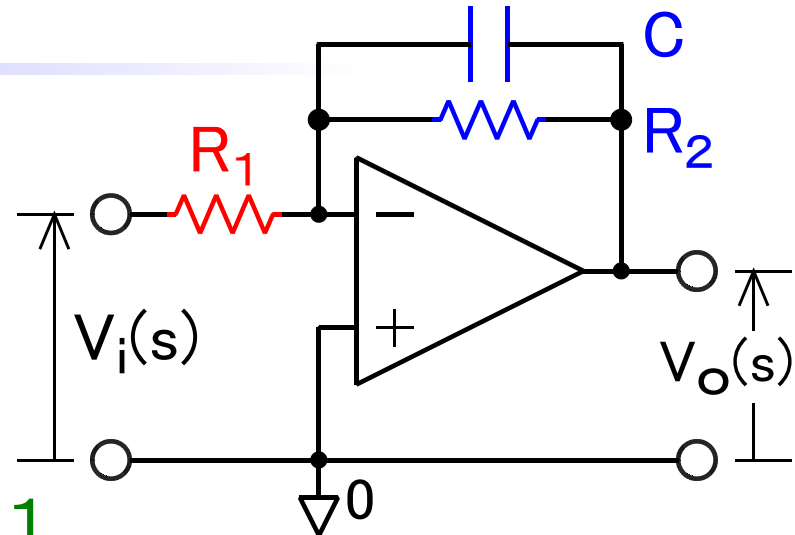
$$\diamond G(s) = - \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega CR_2}$$

◇カットオフ周波数:  $1/(2\pi CR_2)$

◇設計計算

・必要な増幅率  $\rightarrow R_2/R_1$

・カットオフ周波数  $\rightarrow C \rightarrow R$ 再調整



# 演習問題（各自ノートに→答え合わせ）

## バンドパスフィルタ

Page8以降を参考に、

$$Z_1 = R_1 + C \quad Z_2 = R_2 // C$$

であるバンドパスフィルタの伝達式を求めてみよ。  
余裕があれば、ボード線図も作成してみよ。

# 演習問題（プチテスト）

---

## ○ローパスフィルタの設計

以下の条件でローパスフィルタをかねた増幅回路を設計せよ。

- ・ 増幅率：1000倍 → 2段
- ・ 1段目のローパスカットオフ 1kHz
- ・ 2段目のローパスカットオフ 100Hz