

制御・電子回路への ラプラス変換の応用

工学部 機械知能工学科

熊谷 正朗

kumagai@mail.tohoku-gakuin.ac.jp

東北学院大学工学部
ロボット開発工学研究室



今回の到達目標

○ラプラス変換による制御メカトロ解析

◇ラプラス変換の制御メカトロでの有用性

を説明できる。

- ・制御対象、運動方程式の変換
- ・コンデンサ、コイルの抵抗との統合

◇基本的なラプラス変換、

および複素数計算ができる。

◇ラプラス変換を用いた周波数応答

の計算ができる。

ラプラス変換

○微分を文字にできる変換

◇ラプラス変換、逆変換の数学的計算: スキップ

◇計算済みの表を用いた変換、逆変換

- ・ $1 \Leftrightarrow (1/s)$ 、 $t \Leftrightarrow (1/s^2)$ 、 $e^{-at} \Leftrightarrow 1/(s+a)$
- ・ $\cos(\omega t) \Leftrightarrow s/(s^2+\omega^2)$ $a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \Leftrightarrow$
- ・ $\sin(\omega t) \Leftrightarrow \omega/(s^2+\omega^2)$ $a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$
- ・ $\sin(\omega t + \phi) \Leftrightarrow (s \sin \phi + \omega \cos \phi)/(s^2+\omega^2)$

◇ $f(t) \rightarrow F(s)$ のとき、 $df(t)/dt \rightarrow sF(s) - f(0)$

- ・ 時間微分 $\rightarrow s$ をかける ※初期値ゼロ

ラプラス変換の活用

○微分方程式のs多項式化

◇運動方程式の変換

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) &= f(t) \\ \Rightarrow ms^2 X(s) + csX(s) + kX(s) &= F(s) \\ \rightarrow (ms^2 + cs + k) X(s) &= F(s) \end{aligned}$$

◇伝達関数: ラプラス変換表記での入力 $\rightarrow$ 出力

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

ラプラス変換の活用

○制御工学とラプラス変換

◇古典制御理論の基本表現

- ・ 伝達関数 $\leftarrow$ システムの微分方程式
- ・ 周波数応答
- ・ ボード線図
- ・ 安定判別
- ・ ラウス・フルビッツの方法
- ・ ナイキスト線図・根軌跡法

ラプラス変換の活用

○電子回路とラプラス変換

$\rightarrow$ 特性はMB06

◇抵抗・コンデンサ・コイルの統一表現

- ・ $e(t) = R i(t) \Rightarrow E(s) = R I(s)$
- ・ $e(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow E(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$
- ・ $e(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow E(s) = Ls I(s)$
- ・ 全て $E(s) = ? I(s)$ の形

$\rightarrow Z(s) = E(s)/I(s)$ とすると抵抗と同型

ラプラス変換の活用

○インピーダンスの計算

◇インピーダンス $Z(j\omega)$ [Ω] j : 虚数単位

- ・ 抵抗: R コンデンサ: $1/Cs$ コイル: $Ls \rightarrow$
- ・ 抵抗: R コンデンサ: $1/j\omega C$ コイル: $j\omega L$
- ・ $\omega = 2\pi f$: 角周波数[rad/s] f : 周波数[Hz]
- ・ 抵抗と同じように計算できる
- 例) 直列合成、並列合成、分圧
- 直: $Z = Z_1 + Z_2$ 並: $Z = (Z_1 Z_2)/(Z_1 + Z_2)$
- ・ オペアンプによる回路もインピーダンスでOK

ラプラス変換の活用

○反転増幅型回路

◇式は同じ形

- ・ $V_o(s) = -(Z_2/Z_1) V_i(s)$
- $\rightarrow$ 伝達関数 $G(s) = V_o(s)/V_i(s) = -Z_2/Z_1$

◇組み合わせと回路

- ・ $Z_1 = R_1$ $Z_2 = R_2 \rightarrow$ 反転増幅
- ・ $Z_1 = R_1$ $Z_2 = R_2 // C \rightarrow$ ローパスフィルタ
- ・ $Z_1 = R_1 + C$ $Z_2 = R_2 \rightarrow$ ハイパスフィルタ
- ・ $Z_1 = R_1 + C$ $Z_2 = R_2 // C \rightarrow$ バンドパスF

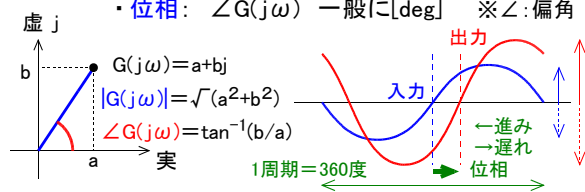
周波数応答

$$OG(j\omega) = G(2\pi f j)$$

→復習:MB07

◇ある周波数 f における特性 を周波数に対して

- ・増幅率: $|G(j\omega)|$ = 出力振幅 ÷ 入力振幅
→ **ゲイン**: $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ [dB]
- ・位相: $\angle G(j\omega)$ 一般に[deg] ※ $\angle$: 偏角



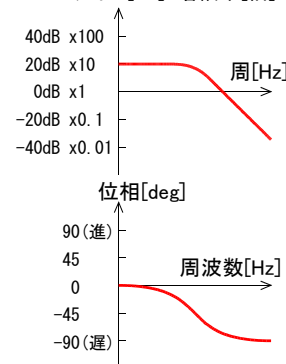
周波数応答

ゲイン[dB] 増幅率[倍]

○ボード線図

◇周波数に対する特性のグラフ

- ・増幅率: $|G(j\omega)|$
ゲイン [dB]
- ・位相: $\angle G(j\omega)$
- ・横軸周波数は対数が一般的



周波数応答

○複素数の計算

◇四則演算類: 略 ◇大きさ、偏角: 前述

$$\text{有理化} \quad \frac{a + bj}{c + dj} = \frac{(a + bj)(c - dj)}{(c + dj)(c - dj)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)j}{c^2 + d^2}$$

◇積、商の大きさと偏角: $G = (a + bj)$ $H = (c + dj)$

- ・ $|GH| = |G| \cdot |H|$ $\angle(GH) = \angle G + \angle H$
- ・ $|G/H| = |G| / |H|$ $\angle(G/H) = \angle G - \angle H$

◇Excelを使う場合: 複素数関数群

IMPRODUCT IMABS IMARGUMENT 等

周波数応答

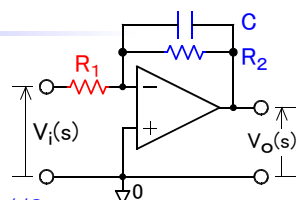
○1次ローパスF

$$\begin{aligned} \diamond G(s) &= V_o(s)/V_i(s) \\ &= -(Z_2/Z_1) \end{aligned}$$

$$Z_1 = R_1 \quad Z_2 = R_2 // C$$

$$\cdot R_2 // C = \frac{R_2(1/j\omega C)}{R_2 + (1/j\omega C)} = \frac{R_2}{j\omega CR_2 + 1}$$

$$\cdot G(s) = -\frac{R_2}{R_1(j\omega CR_2 + 1)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega CR_2}$$



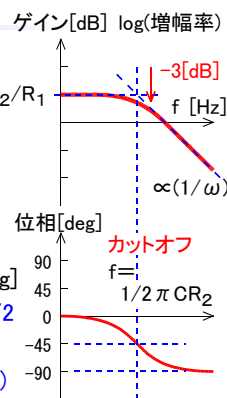
周波数応答: ローパスF

$$\diamond G(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega CR_2}$$

反転・増幅・ローパス特性

◇ローパス特性部

- ・ $\omega \rightarrow \text{小} \Rightarrow 1 \quad (1/1+0)$
- ・ $\omega \rightarrow \text{大} \Rightarrow 1/(j\omega CR_2)$
| $| = 1/(\omega CR_2)$ $\angle = -90[\text{deg}]$
- ・ $1 = \omega CR_2 \rightarrow 1/(1+j) = (1-j)/2$
| $| = \sqrt{2}/2$ $\angle = -45[\text{deg}]$
 $1 = 2\pi f CR_2, f = 1/(2\pi CR_2)$



フィルタ回路の設計

○ローパスフィルタ

◇フィルタの選択

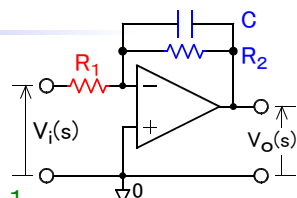
◇特性式

$$\diamond G(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega CR_2}$$

◇カットオフ周波数: $1/(2\pi CR_2)$

◇設計計算

- ・必要な増幅率 → R_2/R_1
- ・カットオフ周波数 → $C \rightarrow R$ 再調整



演習問題(各自ノートに→答え合わせ)

バンドパスフィルタ

Page8以降を参考に、

$$Z_1 = R_1 + C \quad Z_2 = R_2 // C$$

であるバンドパスフィルタの伝達式を求めてみよ。

余裕があれば、ボード線図も作成してみよ。

演習問題(プチテスト)

○ローパスフィルタの設計

以下の条件でローパスフィルタをかねた増幅回路を設計せよ。

- ・増幅率: 1000倍 → 2段
- ・1段目のローパスカットオフ 1kHz
- ・2段目のローパスカットオフ 100Hz