

機械知能工学科

工学総合演習Ⅱ・制御メカトロ

EP-05/Rev 16-1.0

第K05回

制御・電子回路への ラプラス変換の応用

工学部 機械知能工学科

熊谷 正 朗

kumagai@mail.tohoku-gakuin.ac.jp

東北学院大学工学部
ロボット開発工学研究室

RDE

今回の到達目標

○ラプラス変換による制御メカトロ解析

◇ラプラス変換の制御メカトロでの有用性

を説明できる。

- 制御対象、運動方程式の変換
- コンデンサ、コイルの抵抗との統合

◇基本的なラプラス変換、

および複素数計算ができる。

◇ラプラス変換を用いた周波数応答

の計算ができる。

ラプラス変換

○微分を文字にできる変換

◇ラプラス変換、逆変換の数学的計算: スキップ

◇計算済みの表を用いた変換、逆変換

- $1 \Leftrightarrow (1/s)$ 、 $t \Leftrightarrow (1/s^2)$ 、 $e^{-at} \Leftrightarrow 1/(s+a)$
- $\cos(\omega t) \Leftrightarrow s/(s^2+\omega^2)$ $a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \Leftrightarrow$
- $\sin(\omega t) \Leftrightarrow \omega/(s^2+\omega^2)$ $a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$
- $\sin(\omega t + \phi) \Leftrightarrow (s \sin \phi + \omega \cos \phi)/(s^2+\omega^2)$

◇ $f(t) \rightarrow F(s)$ のとき、 $df(t)/dt \rightarrow sF(s) - f(0)$

- 時間微分 $\rightarrow s$ をかける ※初期値ゼロ

ラプラス変換の活用

○微分方程式のs多項式化

◇運動方程式の変換

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow ms^2 X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s)$$

$$\rightarrow (ms^2 + cs + k) X(s) = F(s)$$

◇伝達関数: ラプラス変換表記での入力→出力

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

ラプラス変換の活用

○制御工学とラプラス変換

◇古典制御理論の基本表現

- 伝達関数 ← システムの微分方程式
- 周波数応答
- ボード線図
- 安定判別
- ラウス・フルビッツの方法
- ナイキスト線図・根軌跡法

ラプラス変換の活用

○電子回路とラプラス変換

→特性はMB06

◇抵抗・コンデンサ・コイルの統一表現

$$\cdot e(t) = R i(t) \quad \Rightarrow \quad E(s) = R I(s)$$

$$\cdot e(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad \Rightarrow \quad E(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

$$\cdot e(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad E(s) = Ls I(s)$$

$$\cdot \text{全て } E(s) = ? I(s) \text{ の形}$$

→ $Z(s) = E(s)/I(s)$ とすると抵抗と同型

ラプラス変換の活用

○インピーダンスの計算

◇インピーダンス $Z(j\omega)$ [Ω] j: 虚数単位

- ・ 抵抗: R コンデンサ: $1/Cs$ コイル: $Ls \rightarrow$
- ・ 抵抗: R コンデンサ: $1/j\omega C$ コイル: $j\omega L$
 $\omega = 2\pi f$: 角周波数[rad/s] f : 周波数[Hz]
- ・ 抵抗と同じように計算できる
例) 直列合成、並列合成、分圧
直: $Z = Z_1 + Z_2$ 並: $Z = (Z_1 Z_2) / (Z_1 + Z_2)$
- ・ オペアンプによる回路もインピーダンスでOK

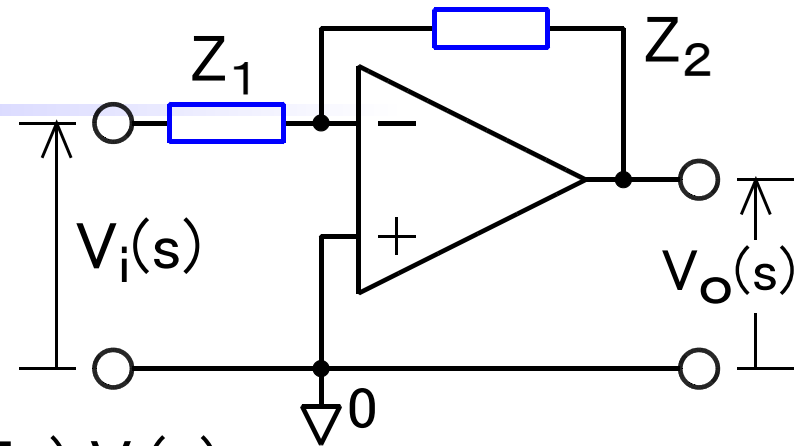
ラプラス変換の活用

○反転増幅型回路

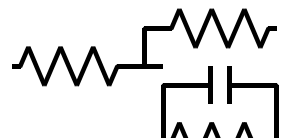
◇式は同じ形

$$\cdot V_o(s) = -(Z_2/Z_1) V_i(s)$$

$$\rightarrow \text{伝達関数 } G(s) = V_o(s)/V_i(s) = -Z_2/Z_1$$



◇組み合わせと回路



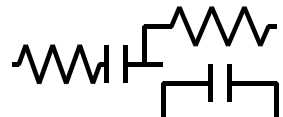
$$\cdot Z_1 = R_1 \quad Z_2 = R_2$$

→ 反転増幅



$$\cdot Z_1 = R_1 \quad Z_2 = R_2 // C$$

→ ローパスフィルタ



$$\cdot Z_1 = R_1 + C \quad Z_2 = R_2$$

→ ハイパスフィルタ



$$\cdot Z_1 = R_1 + C_1 \quad Z_2 = R_2 // C_2$$

→ バンドパスF

周波数応答

○ $G(j\omega) = G(2\pi f j)$

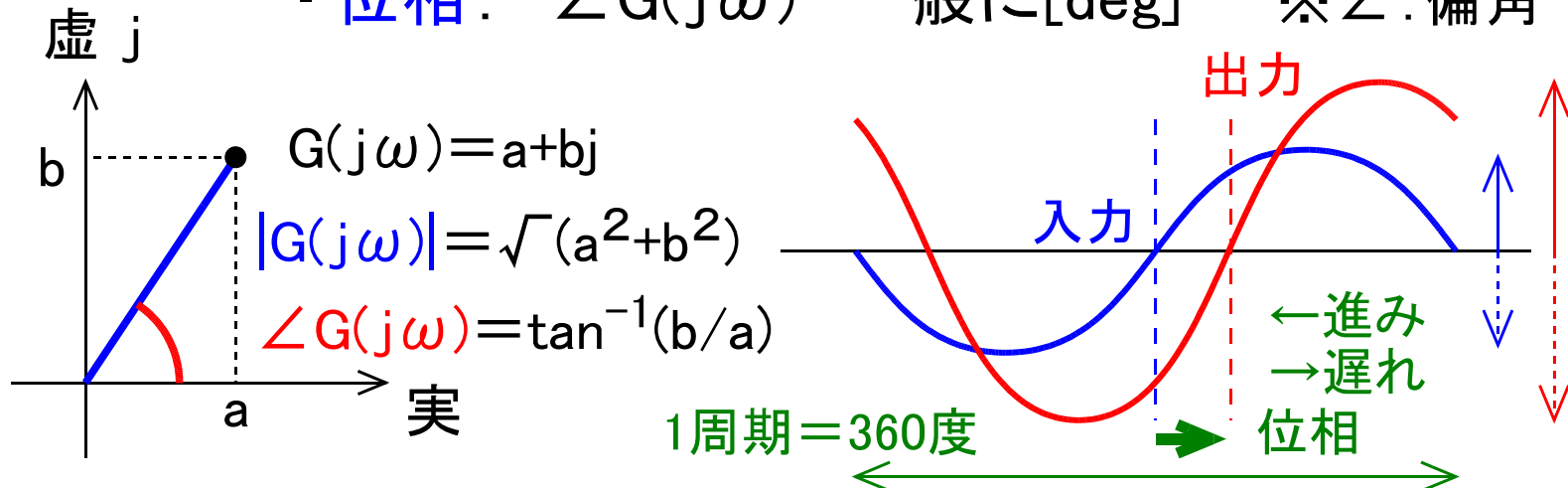
→ 復習: MB07

◇ ある周波数 f における特性 を周波数に対して

・ 増幅率: $|G(j\omega)|$ = 出力振幅 ÷ 入力振幅

→ ゲイン: $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ [dB]

・ 位相: $\angle G(j\omega)$ 一般に [deg] ※ $\angle$: 偏角

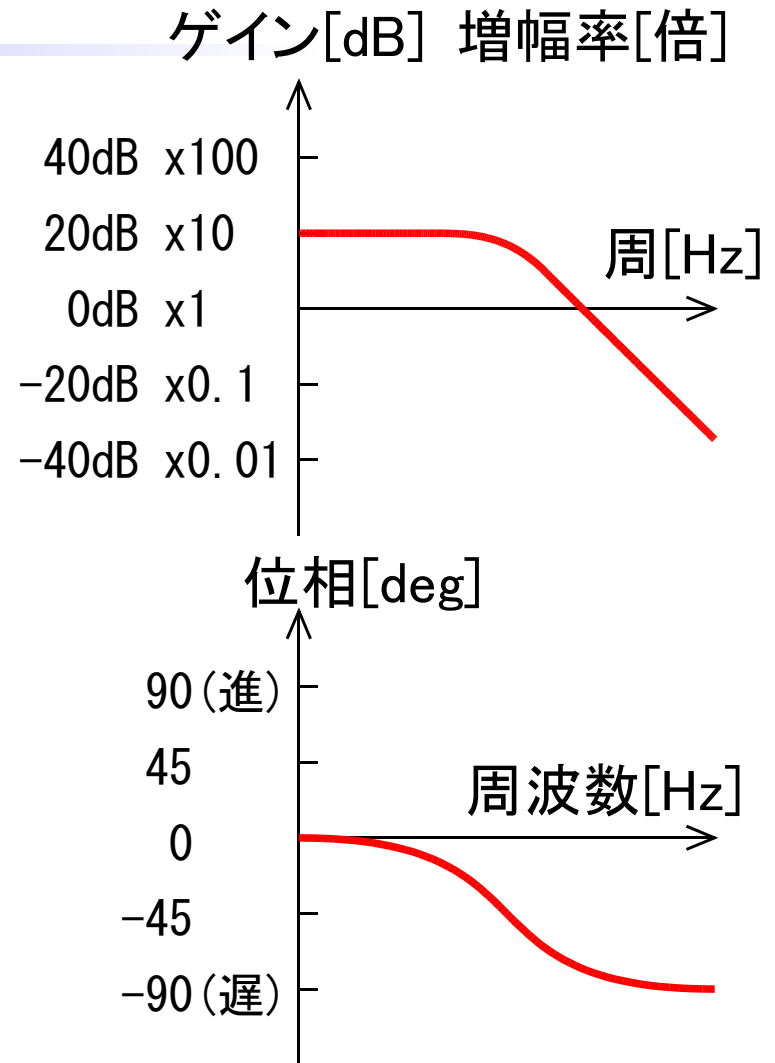


周波数応答

○ボード線図

◇周波数に対する
特性のグラフ

- ・増幅率: $|G(j\omega)|$
ゲイン [dB]
- ・位相: $\angle G(j\omega)$
- ・横軸周波数は
対数が一般的



周波数応答

○複素数の計算

◇四則演算類：略

◇大きさ、偏角：前述

◇ $\frac{a+bj}{c+dj} = \frac{(a+bj)(c-dj)}{(c+dj)(c-dj)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)j}{c^2 + d^2}$

有理化

◇積、商の大きさと偏角： $G=(a+bj)$ $H=(c+dj)$

・ $|GH|=|G| \cdot |H|$ $\angle(GH)=\angle G + \angle H$

・ $|G/H|=|G| / |H|$ $\angle(G/H)=\angle G - \angle H$

◇Excelを使う場合：複素数関数群

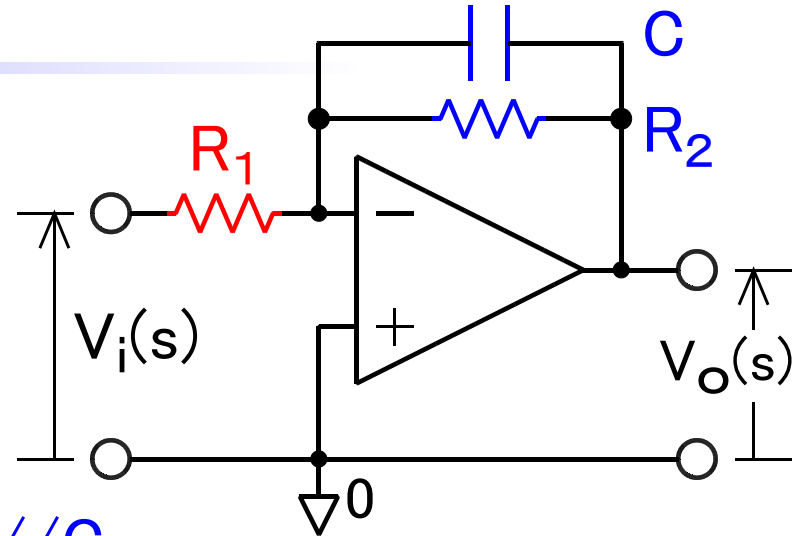
IMPRODUCT IMABS IMARGUMENT 等

周波数応答

○1次ローパスF

$$\begin{aligned}\diamond G(s) &= V_o(s)/V_i(s) \\ &= -(Z_2/Z_1)\end{aligned}$$

$$Z_1 = R_1 \quad Z_2 = R_2 // C$$



$$\cdot R_2 // C = \frac{R_2(1/j\omega C)}{R_2 + (1/j\omega C)} = \frac{R_2}{j\omega CR_2 + 1}$$

$$\cdot G(s) =$$

$$-\frac{R_2}{R_1(j\omega CR_2 + 1)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega CR_2}$$

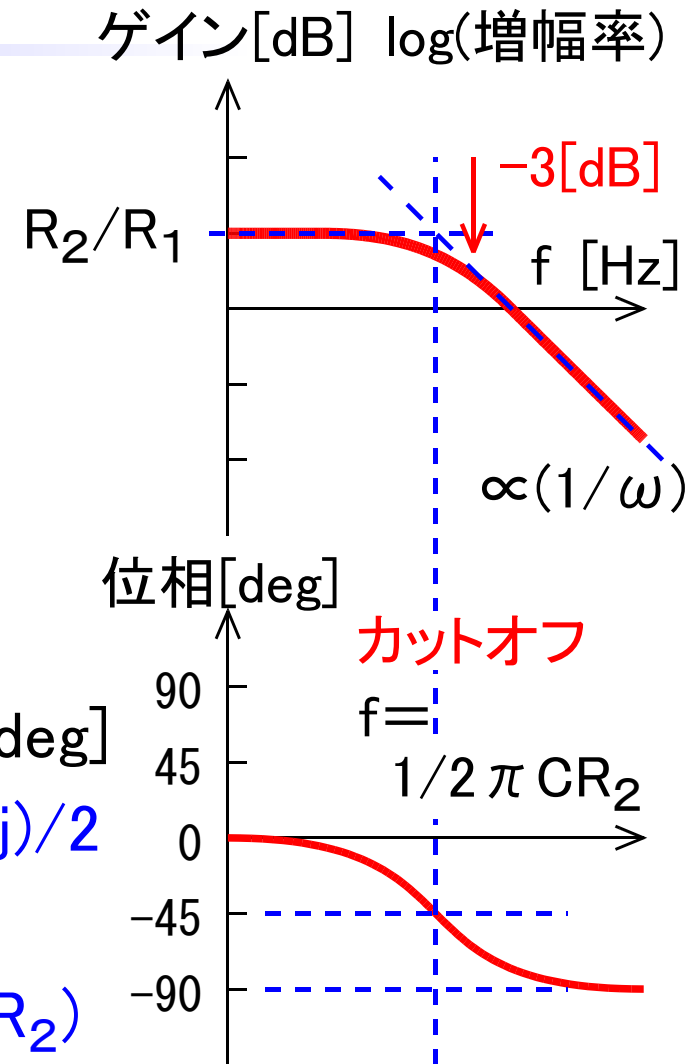
周波数応答：ローパスF

$$\diamond G(s) = - \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega CR_2}$$

反転・増幅・ローパス特性

◇ローパス特性部

- ・ $\omega \rightarrow \text{小} \quad \doteq 1 \quad (1/1+0)$
- ・ $\omega \rightarrow \text{大} \quad \doteq 1/(j\omega CR_2)$
 $| | = 1/(\omega CR_2) \quad \angle = -90[\text{deg}]$
- ・ $1 = \omega CR_2 \rightarrow 1/(1+j) = (1-j)/2$
 $| | = \sqrt{2}/2 \quad \angle = -45[\text{deg}]$
 $1 = 2\pi f CR_2, f = 1/(2\pi CR_2)$



フィルタ回路の設計

○ローパスフィルタ

◇フィルタの選択

◇特性式

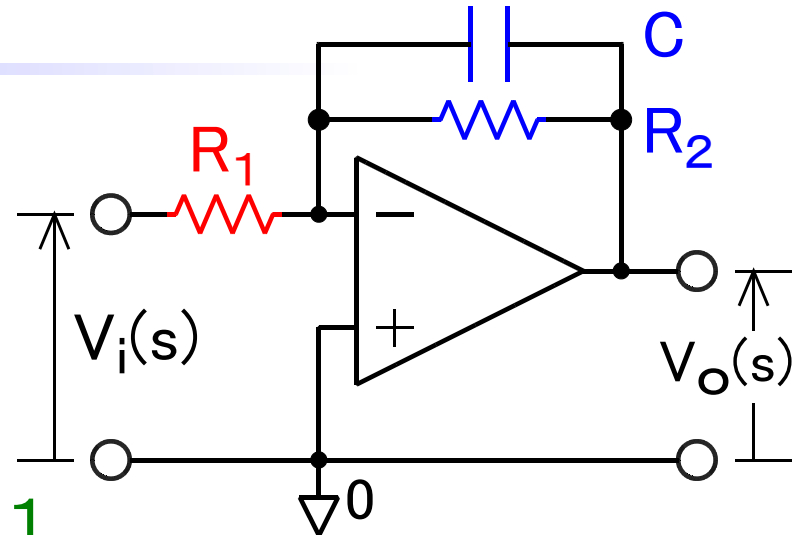
$$\diamond G(s) = - \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega CR_2}$$

◇カットオフ周波数: $1/(2\pi CR_2)$

◇設計計算

・必要な増幅率 $\rightarrow R_2/R_1$

・カットオフ周波数 $\rightarrow C \rightarrow R$ 再調整



演習問題（各自ノートに→答え合わせ）

バンドパスフィルタ

Page8以降を参考に、

$$Z_1 = R_1 + C_1 \quad Z_2 = R_2 // C_2$$

であるバンドパスフィルタの伝達式を求めてみよ。
余裕があれば、ボード線図も作成してみよ。

演習問題（プチテスト）

○ローパスフィルタの設計

以下の条件でローパスフィルタをかねた増幅回路を設計せよ。

- ・ 増幅率：1000倍 → 2段
- ・ 1段目のローパスカットオフ 1kHz
- ・ 2段目のローパスカットオフ 100Hz