機械知能工学科

工学総合演習Ⅱ・制御メカトロ

EP-04/Rev 18-1.0

第K04回

制御・電子回路への ラプラス変換の応用

工学部 機械知能工学科

熊 谷 正 朗

kumagai@mail.tohoku-gakuin.ac.jp

東北学院大学工学部
ロボット開発工学研究室RDE

今回の到達目標

○ラプラス変換による制御メカトロ解析

◇ラプラス変換の制御メカトロでの有用性 を説明できる。

- ・制御対象、運動方程式の変換
- ・コンデンサ、コイルの抵抗との統合

◇基本的なラプラス変換、 および複素数計算ができる。

◇ラプラス変換を用いた周波数応答 の計算ができる。

ラプラス変換

○微分を文字にできる変換

◇ラプラス変換、逆変換の数学的計算:スキップ

◇計算済みの表を用いた変換、逆変換

- ・1 ⇔ $(1/s)$、 t ⇔ $(1/s^2)$、 e^{-at} ⇔ $1/(s+a)$
- ・$\cos(\omega t)$ ⇔ $s/(s^2+\omega^2)$　　$a\cdot f(t)+b\cdot g(t)$⇔
- ・$\sin(\omega t)$ ⇔ $\omega/(s^2+\omega^2)$　　$a\cdot F(s)+b\cdot G(s)$
- ・$\sin(\omega t+\phi)$⇔$(s\sin\phi+\omega\cos\phi)/(s^2+\omega^2)$

◇f(t)→F(s)のとき、$df(t)/dt \to sF(s)-f(0)$

- ・時間微分→sをかける　※初期値ゼロ

ラプラス変換の活用

○微分方程式のs多項式化

◇運動方程式の変換

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+c\frac{dx(t)}{dt}+kx(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow ms^2X(s)+csX(s)+kX(s) = F(s)$$

$$\to (ms^2+cs+k)\,X(s) = F(s)$$

◇伝達関数:ラプラス変換表記での入力→出力

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+k}$$

ラプラス変換の活用

○制御工学とラプラス変換

◇古典制御理論の基本表現

- ・伝達関数 ← システムの微分方程式
- ・周波数応答
- ・ボード線図
- ・安定判別
- ・ラウス・フルビッツの方法
- ・ナイキスト線図・根軌跡法

ラプラス変換の活用

○電子回路とラプラス変換　→特性はMB06

◇抵抗・コンデンサ・コイルの統一表現

- ・$e(t) = R\,i(t)$　　$\Rightarrow E(s) = R\,I(s)$
- ・$e(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$　　$\Rightarrow E(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$
- ・$e(t) = L\frac{di(t)}{dt}$　　$\Rightarrow E(s) = Ls\,I(s)$
- ・全て E(s)=?I(s)の形

　→ $Z(s)=E(s)/I(s)$ とすると抵抗と同型

ラプラス変換の活用

○インピーダンスの計算

◇インピーダンス Z(jω) [Ω]　　j:虚数単位

- ・抵抗:R コンデンサ:1/Cs コイル:Ls →
- ・抵抗:R コンデンサ:1/jωC コイル:jωL

　ω=2πf :角周波数[rad/s] f:周波数[Hz]

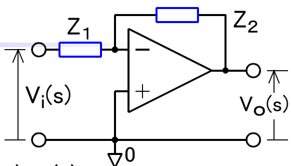
- ・抵抗と同じように計算できる

　例)直列合成、並列合成、分圧

　直:$Z=Z_1+Z_2$　並:$Z=(Z_1Z_2)/(Z_1+Z_2)$

- ・オペアンプによる回路もインピーダンスでOK

ラプラス変換の活用



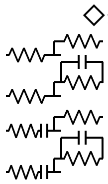
○反転増幅型回路

◇式は同じ形

- ・$V_o(s)=-(Z_2/Z_1)\,V_i(s)$

　→ 伝達関数 $G(s)=V_o(s)/V_i(s)=-Z_2/Z_1$

◇組み合わせと回路



- ・$Z_1=R_1$ $Z_2=R_2$　→反転増幅
- ・$Z_1=R_1$ $Z_2=R_2//C$　→ローパスフィルタ
- ・$Z_1=R_1+C$ $Z_2=R_2$　→ハイパスフィルタ
- ・$Z_1=R_1+C_1$ $Z_2=R_2//C_2$　→バンドパスF

周波数応答

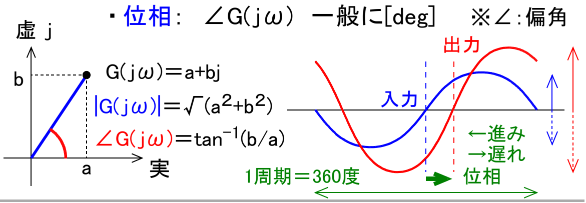
○$G(j\omega)=G(2\pi fj)$ →復習:MB07

◇ある周波数 f における特性 を周波数に対して

・増幅率: $|G(j\omega)|$ =出力振幅÷入力振幅

→ ゲイン: $20\log_{10}|G(j\omega)|$ [dB]

・位相: $\angle G(j\omega)$ 一般に[deg] ※∠:偏角



周波数応答

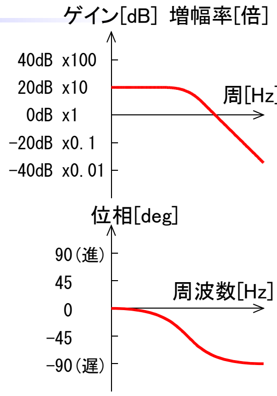
○ボード線図

◇周波数に対する特性のグラフ

・増幅率: $|G(j\omega)|$ ゲイン [dB]

・位相: $\angle G(j\omega)$

・横軸周波数は対数が一般的



周波数応答

○複素数の計算

◇四則演算類:略 ◇大きさ、偏角:前述

◇ 有理化 $\dfrac{a+bj}{c+dj}=\dfrac{(a+bj)(c-dj)}{(c+dj)(c-dj)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)j}{c^2+d^2}$

◇積、商の大きさと偏角: $G=(a+bj)$ $H=(c+dj)$

・$|GH|=|G|\cdot|H|$ $\angle(GH)=\angle G+\angle H$

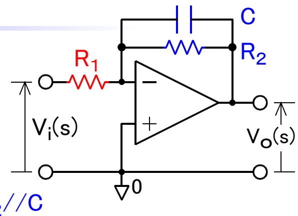
・$|G/H|=|G|/|H|$ $\angle(G/H)=\angle G-\angle H$

◇Excelを使う場合:複素数関数群

IMPRODUCT IMABS IMARGUMENT 等

周波数応答

○1次ローパスF



◇$G(s)=V_o(s)/V_i(s)$

$=-(Z_2/Z_1)$

$Z_1=R_1$ $Z_2=R_2//C$

・$R_2//C=\dfrac{R_2(1/j\omega C)}{R_2+(1/j\omega C)}=\dfrac{R_2}{j\omega CR_2+1}$

・$G(s)=$

$-\dfrac{R_2}{R_1(j\omega CR_2+1)}=-\dfrac{R_2}{R_1}\ \dfrac{1}{1+j\omega CR_2}$

周波数応答:ローパスF

◇$G(s)=-\dfrac{R_2}{R_1}\ \dfrac{1}{1+j\omega CR_2}$

反転・増幅・ローパス特性

◇ローパス特性部

・ω→小 ≒1 (1/1+0)

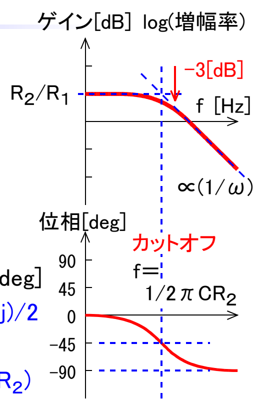
・ω→大 ≒$1/(j\omega CR_2)$

$|\ |=1/(\omega CR_2)$ $\angle=-90$[deg]

・$1=\omega CR_2$ →$1/(1+j)=(1-j)/2$

$|\ |=\sqrt{2}/2$ $\angle=-45$[deg]

$1=2\pi fCR_2$、$f=1/(2\pi CR_2)$

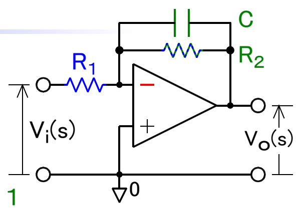


フィルタ回路の設計

○ローパスフィルタ

◇フィルタの選択

◇特性式



◇$G(s)=-\dfrac{R_2}{R_1}\ \dfrac{1}{1+j\omega CR_2}$

◇カットオフ周波数: $1/(2\pi CR_2)$

◇設計計算

・必要な増幅率 → R_2/R_1 → R_1,R_2を決める

・カットオフ周波数 → C → R再調整

演習問題(各自ノートに→答え合わせ)

バンドパスフィルタ

Page8以降を参考に、

$Z_1=R_1+C_1$ $Z_2=R_2//C_2$

であるバンドパスフィルタの伝達式を求めてみよ。

余裕があれば、ボード線図も作成してみよ。

演習問題(プチテスト)

○ローパスフィルタの設計

以下の条件でローパスフィルタをかねた増幅回路を設計せよ。

・増幅率:50倍

・ローパスカットオフ 1kHz

・抵抗R2の範囲は10kΩ～100kΩとすること