

仙台市/仙台市産業振興事業団

ロボット博士の基礎からのメカトロニクスセミナー

C22/Rev 1.01

第22回

メカトロのための数学入門

仙台市地域連携フェロー

熊谷正朗

kumagai@mail.tohoku-gakuin.ac.jp

東北学院大学工学部

ロボット開発工学研究室

RDE

今回の目的

○ メカトロに使える数学的手段の概要

【1】機械の可動部の計算 (1)図形的関係
座標／三角関数／平方根

【2】機械の可動部の計算 (2)運動の計算
微分／積分／微分方程式

【3】機械と回路の周波数応答
三角関数／複素数／ラプラス変換／対数

【4】3次元空間での設計と解析
ベクトル／行列／回転

技術と数学

○ 数学は技術を扱うための**道具**

◇ 数学として習う数学

- ・「いずれ使うと想定して」緻密に積み上げ。
- ・「なにに使うか分からない」→関心薄れ



◇ 技術的検討のための数学

- ・きっちり考えるときに**すっきり説明**。
- ・**目的に応じて、定石的**使い方がある。
→ 使い方を知り、使うものから復習・学習

どの程度のレベルの数学を使うか？

○ 熊谷の場合

◇大半は普通高校の教科書の範囲を利用
各種演算、三角関数、対数、微分積分
行列ベクトル(大学で追加)

◇部分的に大学で習った数学

微分方程式 → 数値積分で解いてしまう

ラプラス変換 → 理論抜きで道具にする

フーリエ変換 → 原理だけを処理に活用

※授業では定義, 証明, 手計算など習ったが、未使用

→理論解析などの分野では、必要になる知識。

今回の目的と方針

○ 数学活用インデックス

◇あくまで概要

- ・この時間で細かく説明することは無理

→「**こういう手段がこう使えます**」

という概要紹介

◇このセミナーの後で

- ・実際の業務に使えるようなものがあれば、
ネットで検索、書店の参考書、
解説リクエスト、御用聞き相談など。

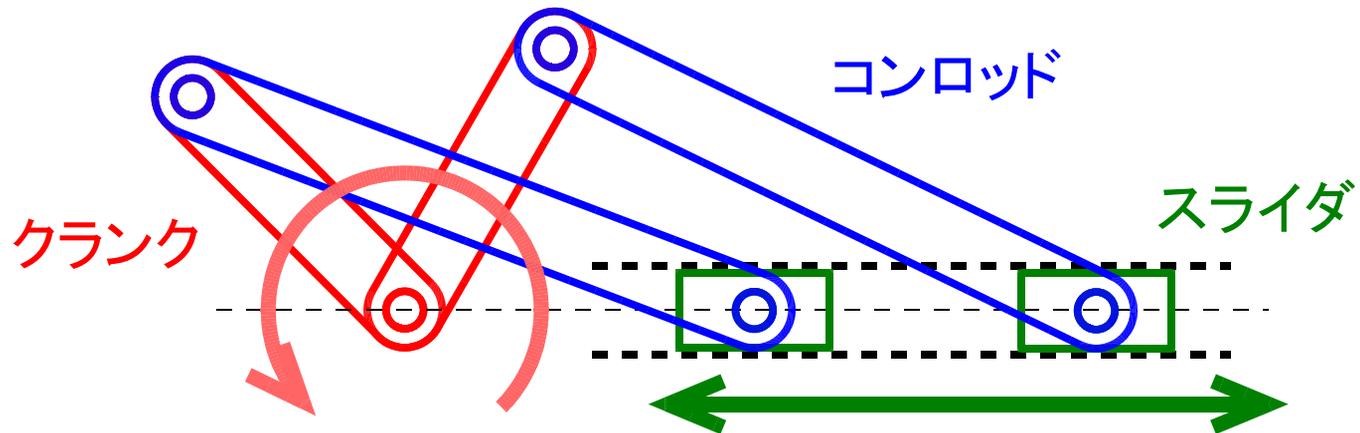
【1】機械の可動部の解析(1) 図形的関係

○ 題材: クランクスライダ機構

- ・ クランクを回転させると、スライダが往復。
スライダを往復させると、クランクが回転。

用途: 様々な機械、エンジンなど

- ・ クランクの角度と、スライダの位置は？



機械の可動部の解析(1) 図形的関係

○ 解析に必要な数学

◇ 座標、座標軸

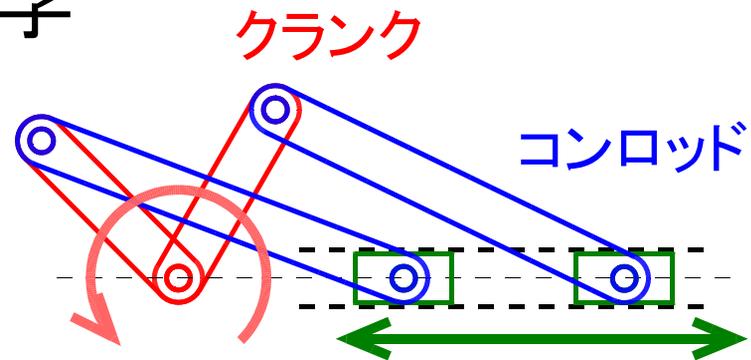
- ・ 計算の基準

◇ 三角関数

- ・ 回転のあるところに三角関数
- ・ クランク部分

◇ 平方根 / 三平方の定理

- ・ 「ななめ」のあるところに三平方
- ・ コンロッド部

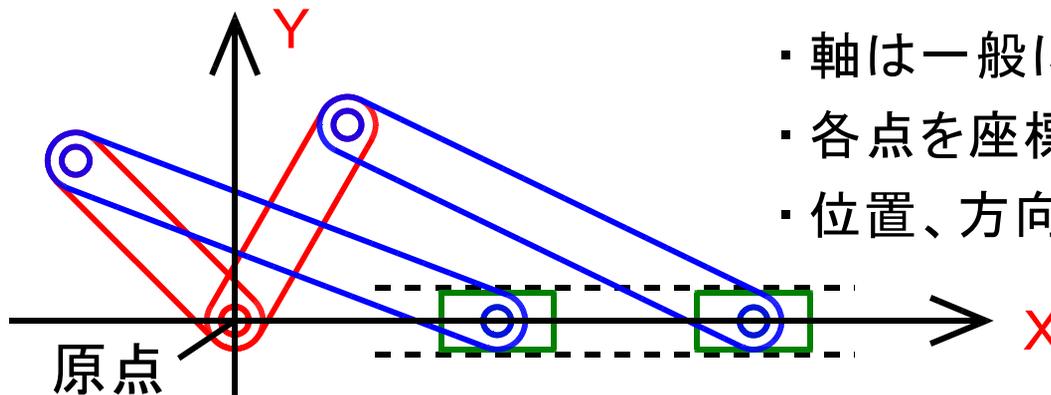


座標

○ ものの位置を明確に定める

◇ 直交座標系

- ・ 直角な2方向の軸で位置を定める。
- ・ 水平、垂直が多いが、斜めも可。
- ・ 単位は任意。メカの場合は[mm]など。



- ・ 軸は一般にX, Y
- ・ 各点を座標値(x,y)で表記可
- ・ 位置、方向は「楽なように」

三角関数の基礎

○ 直角三角形の辺の長さの比

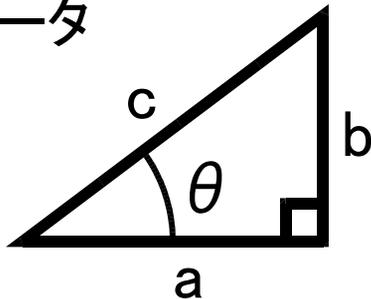
◇三角関数: \cos , \sin , \tan

コサイン(余弦)、サイン(正弦)、
タンジェント(正接※あまり聞かない)

◇逆関数: $h = \cos(g) \Leftrightarrow g = \cos^{-1}(h)$

アークコサイン/サイン/タンジェント

※ θ : シータ



$$\cos \theta = a/c \quad \theta = \cos^{-1}(a/c)$$

$$\sin \theta = b/c \quad \theta = \sin^{-1}(b/c)$$

$$\tan \theta = b/a \quad \theta = \tan^{-1}(b/a)$$

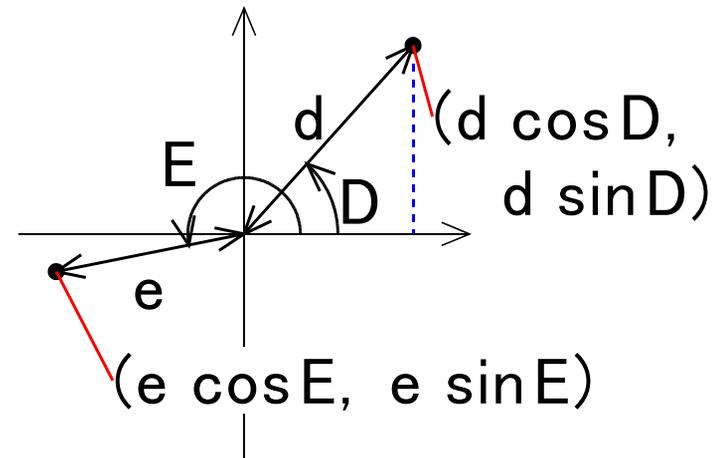
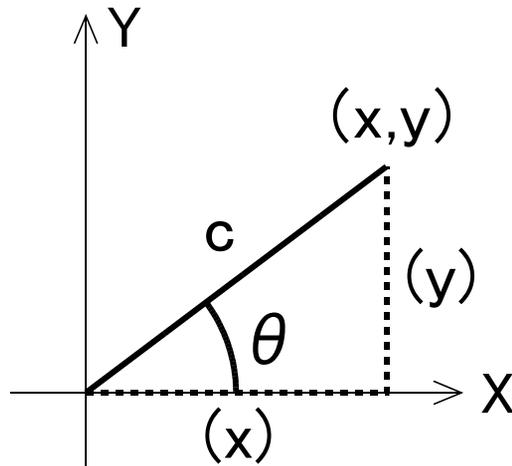
三角関数と座標

○ 三角関数の拡張

◇ 2次元の座標にあわせて負の値にも対応

◇ $x = c \cos \theta$ 、 $y = c \sin \theta$ 、 $y/x = \tan \theta$

◇ $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ ※ $\theta = \text{atan2}(y,x)$ or (x,y)

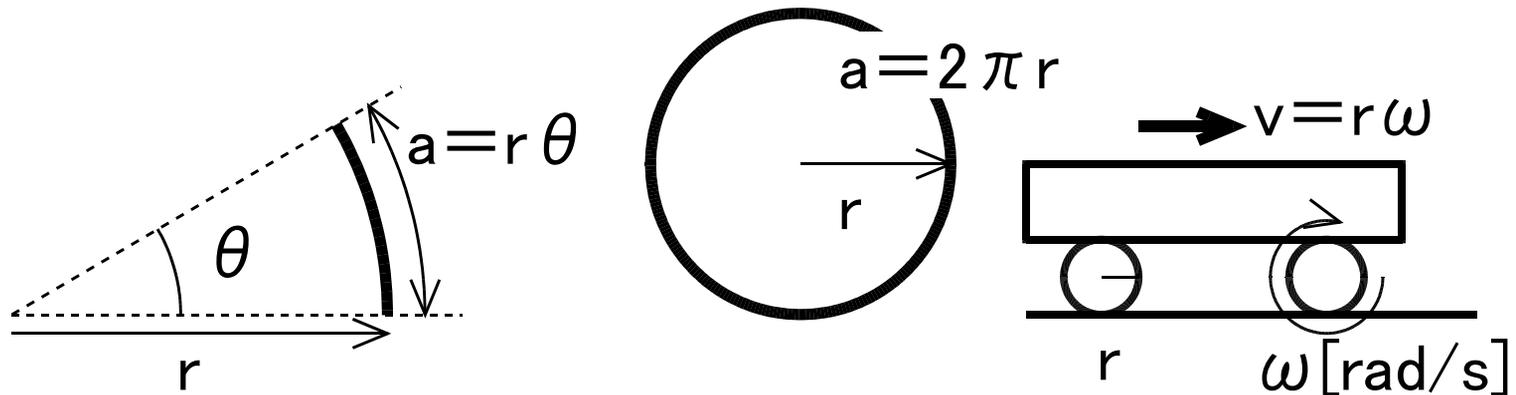


ラジアン[rad]

○ 数学的に便利な角度の単位

◇ 半径 × 角度 → 円弧の長さ

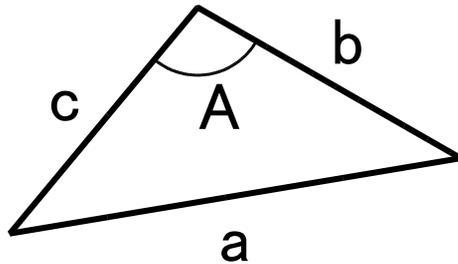
- 車輪の回転角度[rad] → 転がる距離
- 車輪の速度[rad/秒] → 移動速度[mm/s]
- $360[\text{deg}] = 2\pi [\text{rad}]$ π : 円周率 3.14...



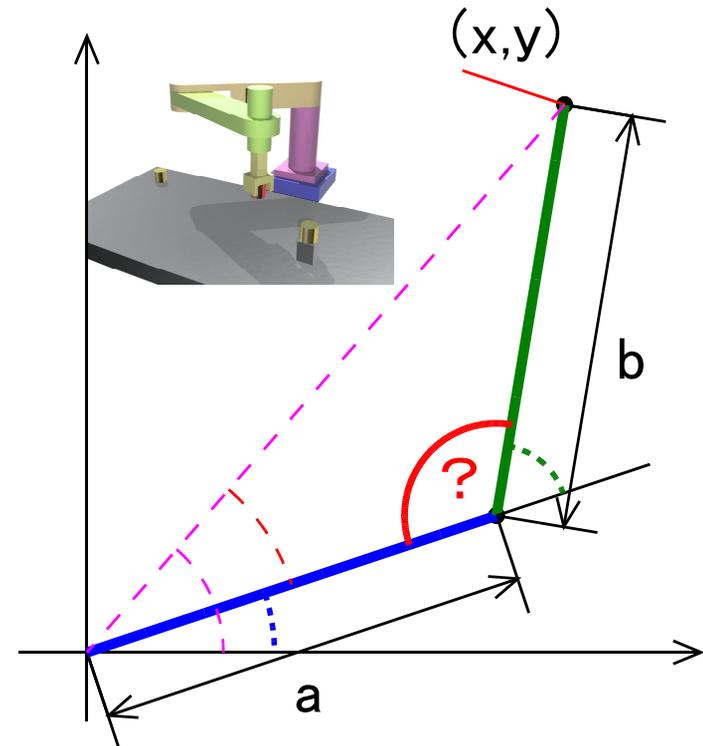
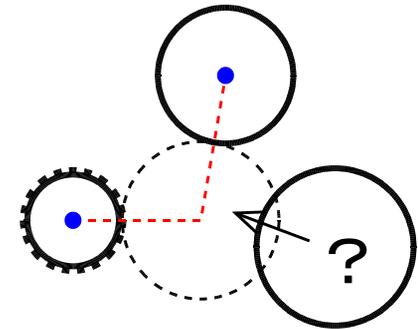
余弦定理

○ 三角形の角度と辺の長さ

◇ 3辺 → 角度、2辺と1角 → 辺



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc$
- $A = \cos^{-1} \{ (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc \}$



平方根と三平方の定理

○ 2乗とその逆、直角三角形の辺の関係

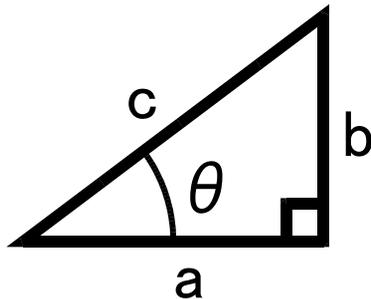
◇平方根 = 2乗(平方)の逆

・例) $5 \times 5 = 25 \Leftrightarrow \sqrt{25} = 5$ (と -5)

・ $\sqrt{2} \doteq 1.414$ $\sqrt{3} \doteq 1.732$ $\sqrt{5} \doteq 2.236$

◇ $a^2 + b^2 = c^2$: 三平方

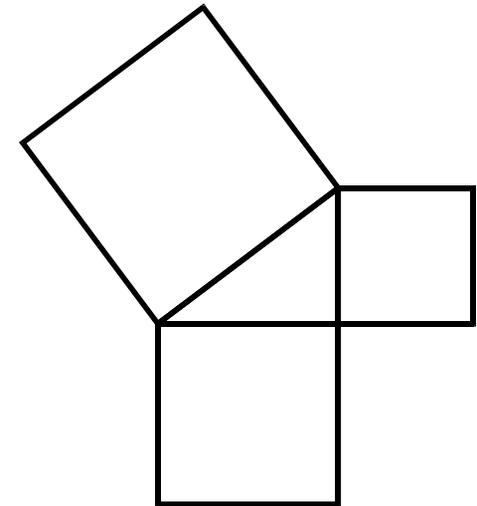
$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1^2$$



整数比:

$$3:4:5$$

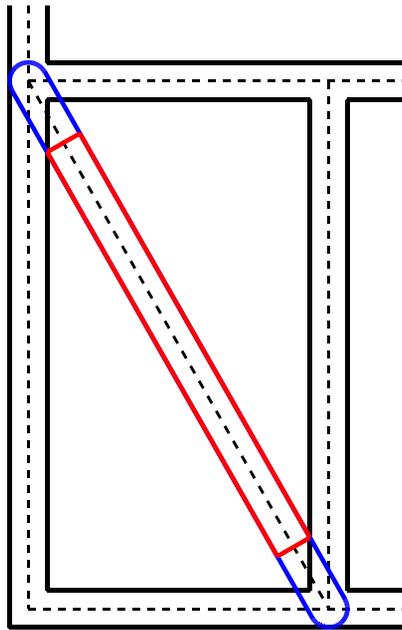
$$5:12:13$$



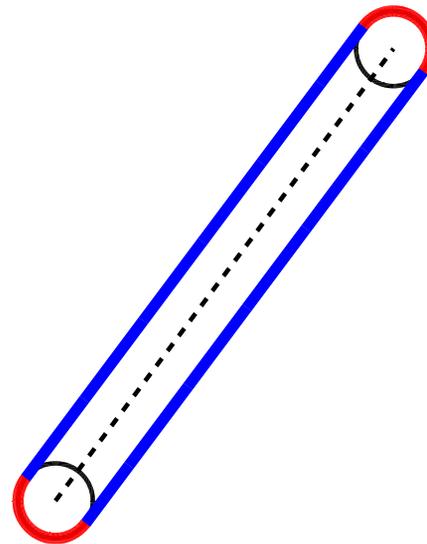
三平方の定理と機械の設計(1)

○ 斜めの位置関係の距離

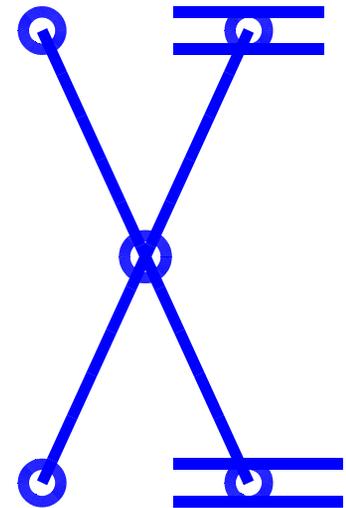
◇座標 or 直角な2方向の距離



筋交いの長さ



軸間距離・ベルト長

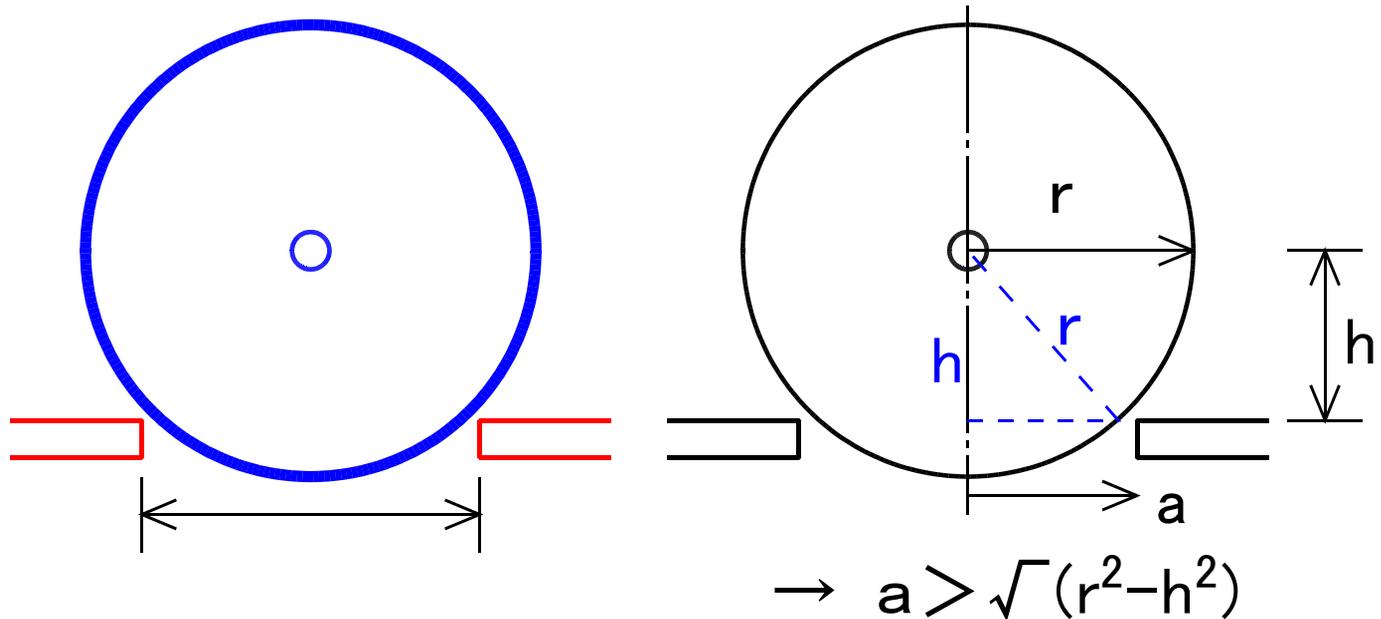


パンタ寸法

三平方の定理と機械の設計(2)

○ 丸い物のクリアランス計算

◇課題: 丸いものに当たらない、すれすれの穴



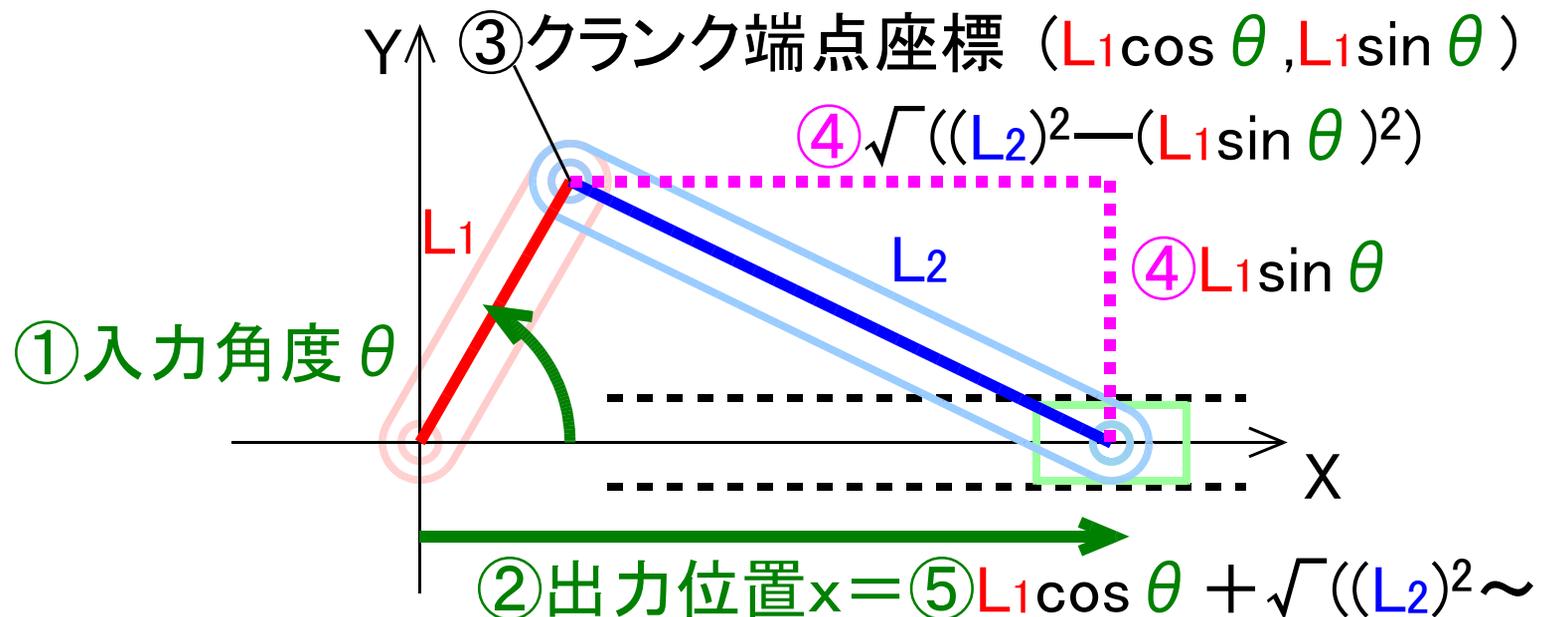
※実際の機械(回転物)でこの設計をするときは、隙間の巻き込み注意

機械の可動部の計算例(1)

○ クランクスライダ機構

※逆は余弦定理

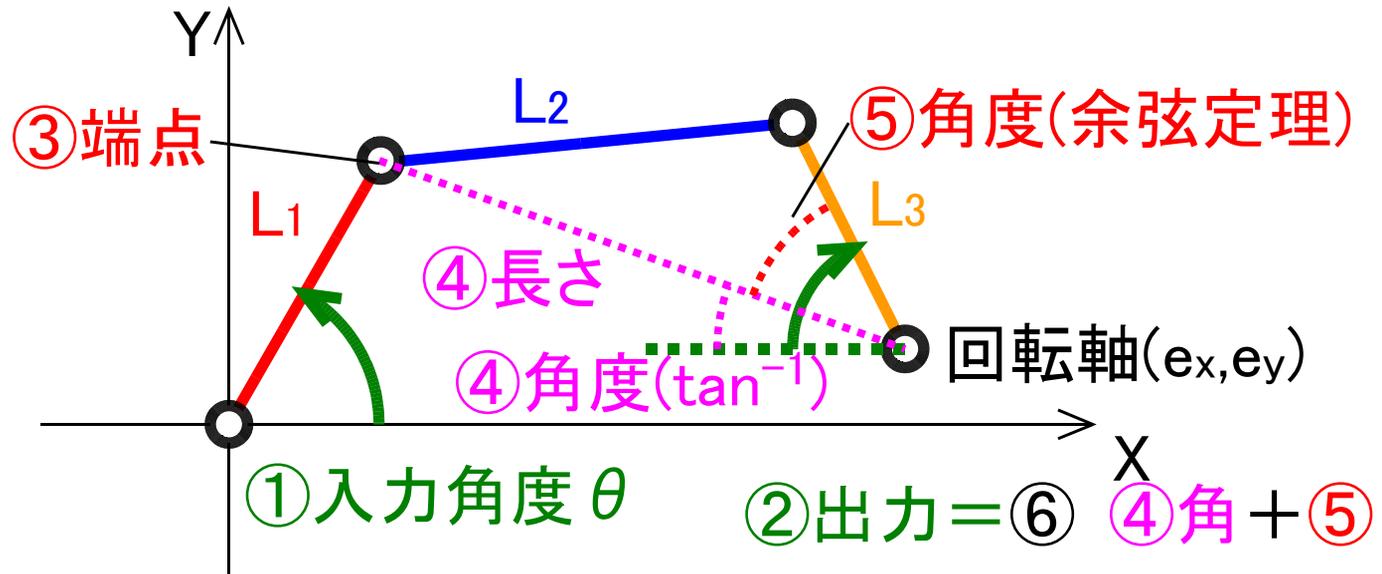
- ①②入出力を明確に→③クランクの端点
→④三平方の定理→⑤座標の加算



機械の可動部の計算例(2)

○ 四節リンク (四棒リンク)

- ①②入出力明確→③入力リンク端点
→④L2,3の三角形注目→⑤余弦→⑥角度合計



メカの可動部の解析のこつ

- わかるところを押さえる → 順次計算
 - ◇ 一定の値をピックアップ
 - ・ 部品の大さき (= 連結点などの間隔)
 - ・ 導き出される固定の角度 (余弦, \tan^{-1})
 - ◇ 変化する値
 - ・ 動きの入力 (回転軸、外部からの駆動)
 - ・ 動きの出力 (目標とする動き)
 - ◇ 補助 / 中間値 (これが決め手)
 - ・ 直接計算できそうな角度等をマーク

【2】メカの可動部の解析（2） 運動の計算

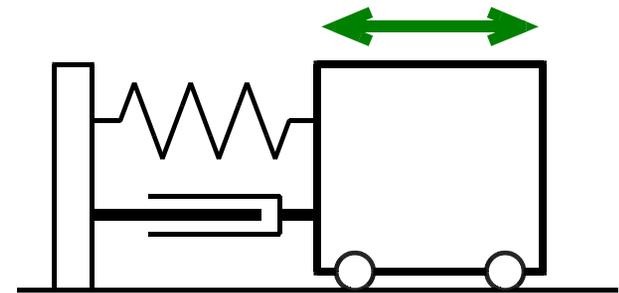
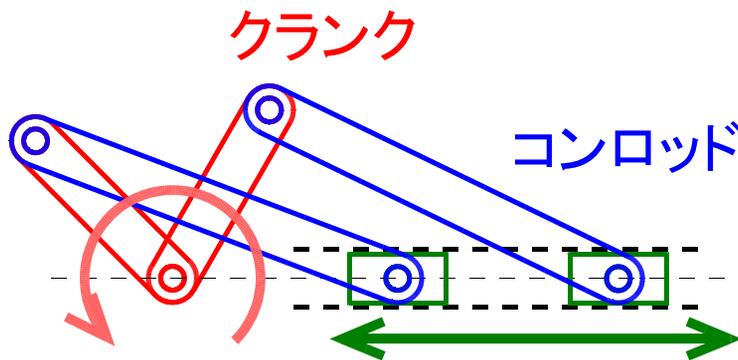
○ 時間とともに動くものの検討

◇ 題材1：クランクスライダの速度

- ・クランクを回したときのスライダの運動

◇ 題材2：バネ・質量・ダンパの運動

- ・物理法則に基づく運動



メカの可動部の解析(2) 運動の計算

○ 解析に必要な数学

◇微分

- ・位置/角度→速度、速度→加速度

◇積分

- ・速度→位置/角度、加速度→速度

◇微分方程式

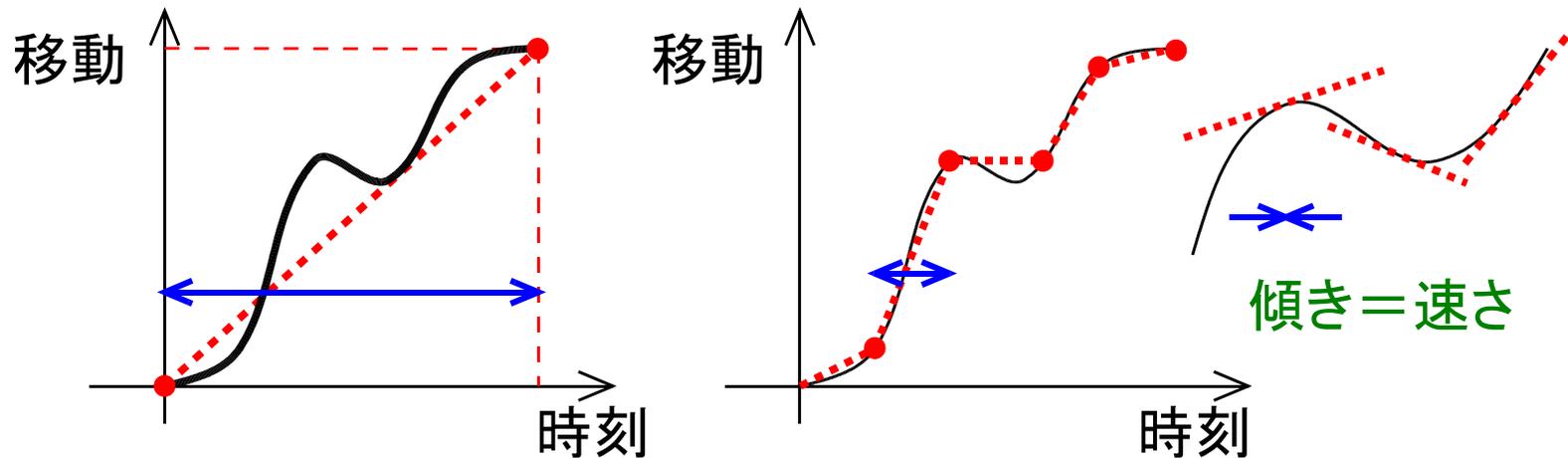
- ・運動の数学表現
- ・方程式を解く(計算)→運動の様子

微分の考え方

○ 短い時間の変化の割合

◇「速さ＝道のり÷時間」

- ・ 計算する時間を瞬間といえるほど短く
→ 時々刻々の速度が得られる

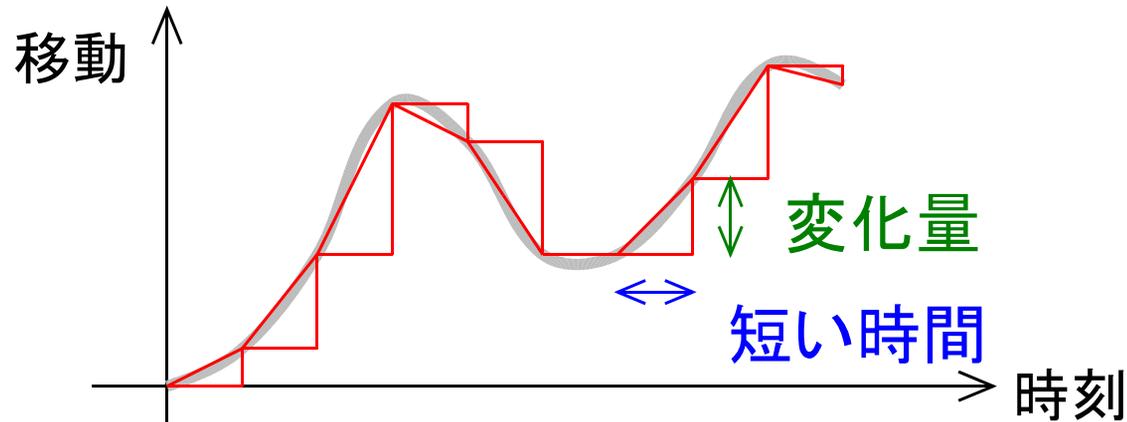


微分の数値計算

○ 本来の現実的な計算に戻す

◇「 $\text{速さ} = \text{道のり} \div \text{時間}$ 」

- ・瞬間といえないまでも、ある程度短い時間での変化を計算
- ・「短さ」: 対象次第、誤差の程度



微分の数値計算例

○ クランクスライダの速度

デルタ
※「 Δ 」をみたら
「小さい」と考える

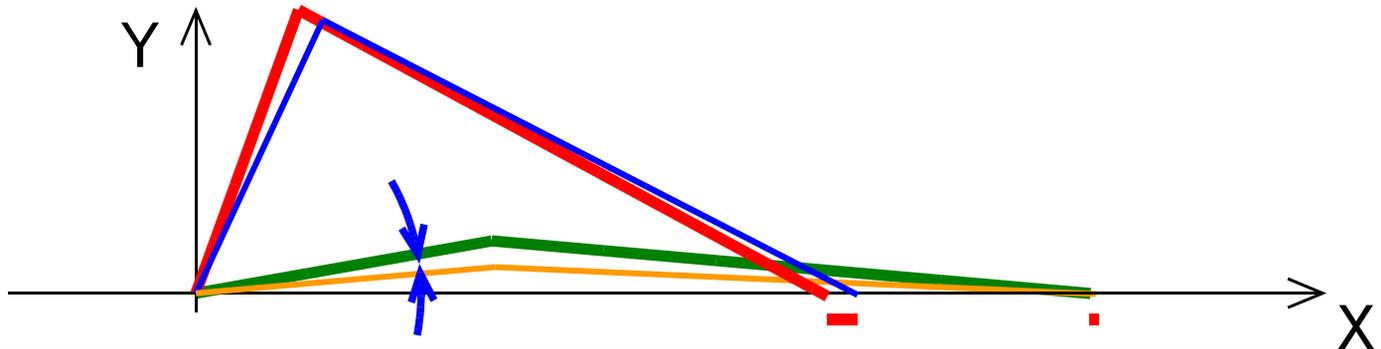
◇ある時刻での、短い時間 Δt のクランク変化

→ ある角度 θ 、 $+\Delta t \times$ クランク角速度

→ スライダの位置 x_1 、 x_2

→ スライダ速度 = 位置変化 ($x_2 - x_1$) $\div \Delta t$

→ スライダ速 \div クランク速 = 瞬間的減速比

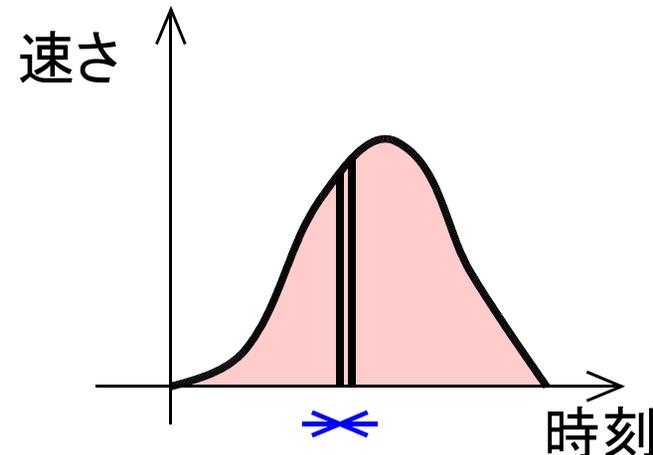
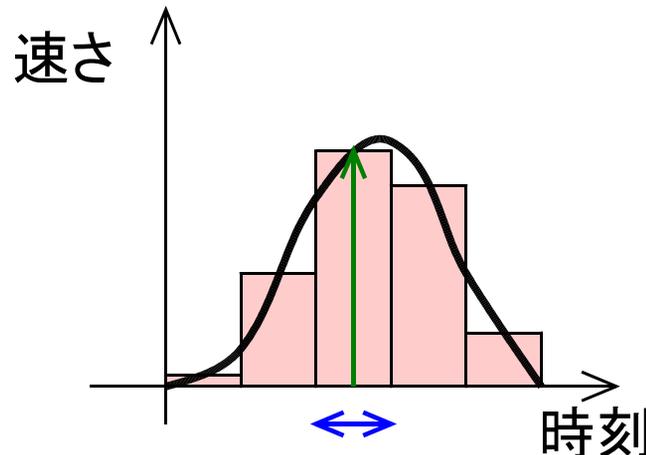


積分の考え方

○ 小分けしたものを積算

◇「道のり = 速度 × 時間」を積み上げる

- ・ 一定の速度といえるくらい短い時間ごとにその時間での移動量を計算 → 合計
→ 時々刻々の速度から移動量



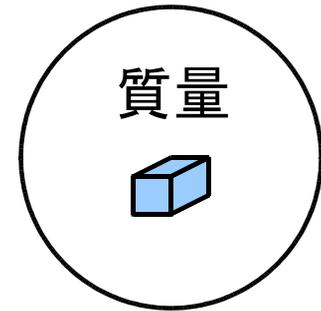
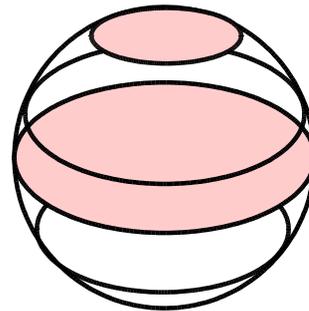
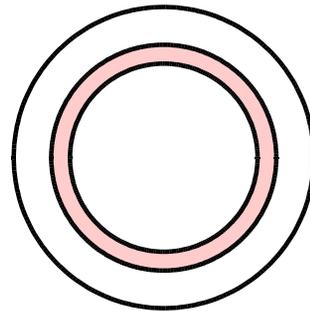
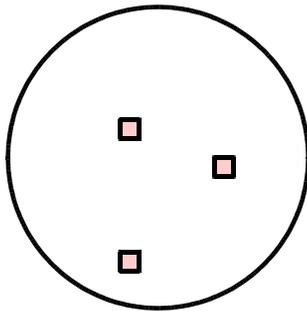
積分の活用対象

○ 時間で積分 と 空間で積分

◇ 時間で積分

◇ 空間で積分

- ・ 面積/体積： 形状を構成する図形要素
- ・ 質量： 体積の小分け要素に密度



積分の数値計算

○ 本来の現実的な計算に戻す

◇ 数学的な積分 = 無限に小さく分割

◇ 数値計算 = 現実的に分割

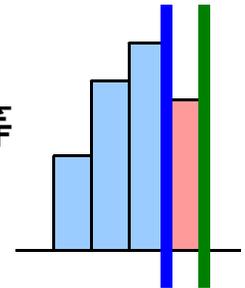
- ・ 例) 等間隔な十分に短い時間、
等間隔な十分に小さい領域

※ 必ずしも等間隔の必要は無い

※ → 変化の激しいところを細かく、等

◇ 速度 → 位置 (「時間で積分」型)

今の位置 = 直前の位置 + 速度 × 時間経過



微分方程式

○ 世の中の関係を表す数式

◇運動に関わるもの

位置との関係、速度／加速度との関係

◇「場」に関わるもの

電磁気、温度など

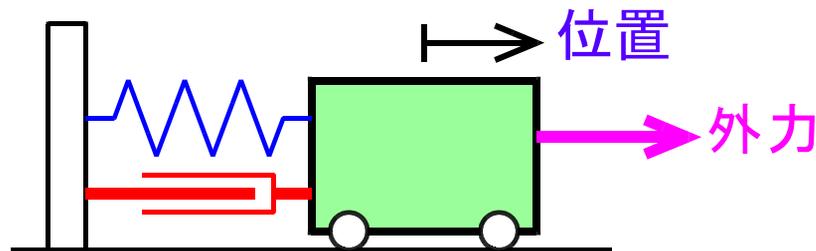
※いずれも、「細かく連続的に」の結果の微分によって関係づけられた式

微分方程式の例

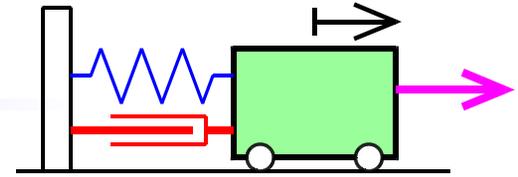
○ バネ－質量－ダンパ(機械振動)

◇物体にかかる力

- ・ 外力
- ・ バネの伸び(位置) × バネ定数
- ・ 移動速度 × ダンパの粘性減衰係数
- ・ 加速度 × 質量 (ニュートンの運動法則)



微分方程式の例・数値解法



○ バネ－質量－ダンパ(機械振動)

◇物体にかかる力

$$\begin{aligned} & \text{質量} \times \text{加速度} + \text{減衰係数} \times \text{速度} \\ & + \text{バネ定数} \times \text{位置} = \text{外力} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{加速度} = (\text{外力} - \square - \square) \div \text{質量}$$

および 加速度 \rightarrow 速度 \rightarrow 位置 (時間積分)

◇注意点

- ・ 時間積分の時間間隔の短さが不十分
 \rightarrow 誤差が積もって計算のずれが大きくなる

【3】機械と回路の周波数応答

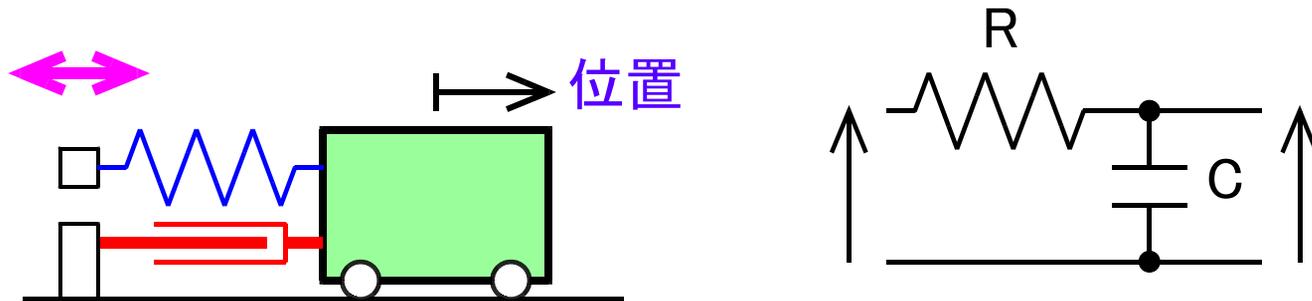
○ メカや回路の繰り返し入力への反応

◇ 題材1：機械の振動

外部からのゆすりに対する揺れの挙動

◇ 題材2：フィルタ回路の周波数特性

回路の交流信号の通りやすさ



機械と回路の周波数応答

○ 解析に必要な数学

◇ 三角関数

正弦波と物理現象、フーリエ級数

◇ 微分方程式とラプラス変換

微分方程式を解析しやすく書き換える

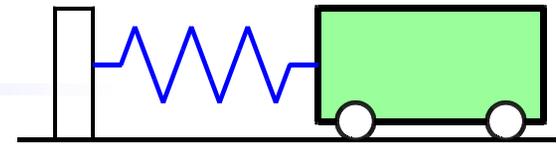
◇ 複素数

ラプラス変換の活用に

◇ 対数

大きく変化する値の扱い用

三角関数と物理現象



○ 微分方程式の解としての三角関数

◇ばね運動の方程式

- ・ 質量 × 加速度 + ばね定数 × 位置 = 0

➔ → 加速度 = -(ばね定数 ÷ 質量) × 位置

- ・ 加速度 = 位置を(時間で微分) × 2回

◇三角関数の微分

$$\sin(At) \rightarrow A \cos(At) \rightarrow -A^2 \sin(At) \dots$$

◇位置 = $\sin(At)$ とすると、加速度 = $-A^2 \sin(At)$

$$A = \sqrt{\text{ばね定数} \div \text{質量}} \text{ でぴったり}$$

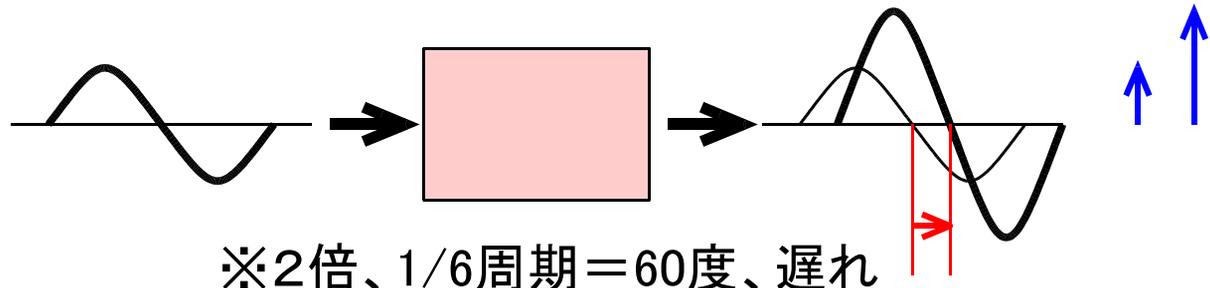
三角関数と正弦波応答

○ 正弦波 $\sin(At)$ で ものを刺激する

◇「線形なもの」に正弦波を入れると、同じ
周期の正弦波が出てくる。

◇変化するもの

- ・ 波の大きさ: 振幅 → 増幅率 (出 ÷ 入)
- ・ タイミングのずれ → 位相 (1周期=360度)



※2倍、1/6周期=60度、遅れ

三角関数とフーリエ級数

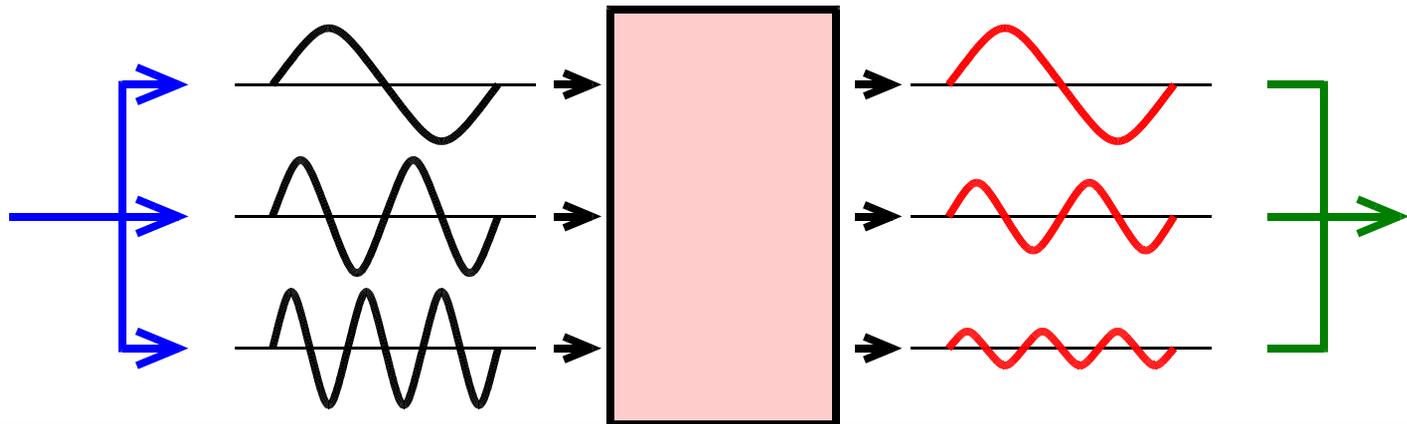
○ 波形を正弦波の組に分解可→合成可

◇ 正確には、余弦波 \cos と正弦波 \sin

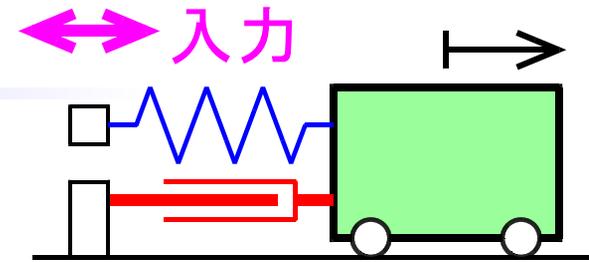
◇ 入力を正弦波に分解

→ 各正弦波ごとに反応を得る

→ 合算する = 分解しなかったときの応答



ラプラス変換による解析



○ ラプラス変換

◇「時間微分」を記号“ $s \times$ ”に置き換える

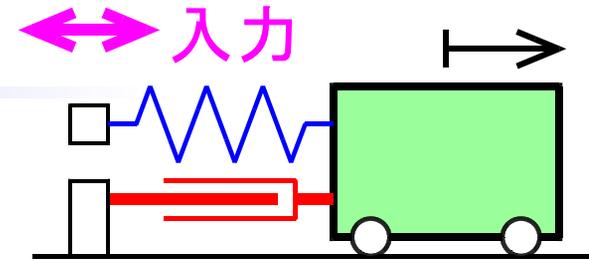
- ・ 速度 = 位置の時間微分 = $s \times$ 位置
- ・ 加速度 = 速度の微分 = $s \times (s \times \text{位置})$ (s^2)

◇微分方程式を書き換える

$$\text{質量} \times \text{加速度} + \text{減衰係数} \times \text{速度} \\ + \text{バネ定数} \times (\text{位置} - \text{入力}) = 0$$

$$\rightarrow \text{質量} \times s^2 \text{位置} + \text{減衰係数} \times s \text{位置} \\ + \text{バネ定数} \times (\text{位置} - \text{入力}) = 0$$

ラプラス変換による解析



○ ラプラス変換 (続き)

$$\rightarrow \text{質量} \times s^2 \text{位置} + \text{減衰係数} \times s \text{位置} \\ + \text{バネ定数} \times (\text{位置} - \text{入力}) = 0$$

$$\rightarrow (\text{質量} \times s^2 + \text{減衰} \times s + \text{バネ}) \times \text{位置} \\ = \text{バネ} \times \text{入力}$$

$$\rightarrow \text{位置} = \\ \text{バネ} / (\text{質量} s^2 + \text{減衰} s + \text{バネ}) \times \text{入力}$$

ラプラス変換による解析

○ ラプラス変換（続き）

→ 位置 =

バネ / (質量 s^2 + 減衰 s + バネ) × 入力

◇ 微分方程式が、「 s の式」による関係に変化

・ この「出力(位置) ÷ 入力」にあたる、

「 s の式」を伝達関数と呼び、対象の

特性を様々に解析するものになる。

(制御工学他)

複素数

○ 虚数と複素数

◇負の数の平方根

- ・ 25の平方根は5 (& -5)(2乗すると25)

- ・ **-25の平方根**は？

 - 「5i」とする ($i \times i = -1$) : **虚数**

 - 工学系は「i」は電流なので「j」を使う

◇普通の数 = 実数 との組み合わせ = **複素数**

$$a + bj$$

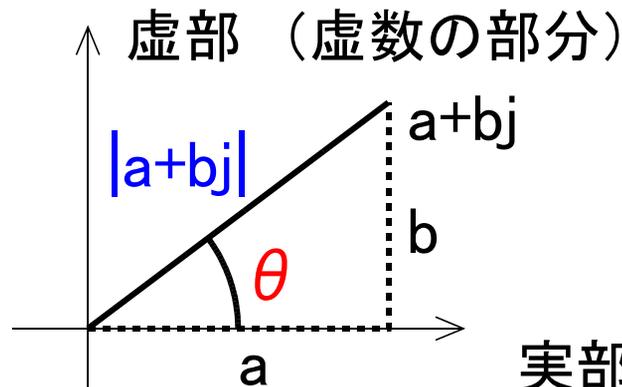
複素数の図的性質

○ 複素数の大きさと偏角

◇ 複素数を2次元の座標で考える

- ・ **大きさ** = 原点からの距離
- ・ **偏角** = 実軸との角度

◇ 複素数 = (実部、虚部) or (大きさ、偏角)



- ・ $|a+bj| = \sqrt{a^2+b^2}$

- ・ $\theta = \angle(a+bj)$
 $= \tan^{-1}(b/a)$

複素数の計算

○ 基本的な計算ルール

◇ 加減算

$$\cdot (a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j$$

◇ 乗算

$$\cdot (a + bj) \times (c + dj) = (ac - bd) + (ad + bc)j \quad \begin{array}{l} \text{※ } bd \times j^2 = \\ bd \times (-1) \end{array}$$

◇ 分母からのjの除去 = 分母の実数化

$$\cdot \frac{1}{(c + dj)} = \frac{(c - dj)}{(c + dj)(c - dj)} = \frac{c - dj}{c^2 + d^2}$$

正弦波応答とラプラス変換

○ ラプラス変換の「 s 」 \rightarrow 「 $2\pi f j$ 」 ($j\omega$)

◇ 伝達関数の s の式

例) バネ / (質量 s^2 + 減衰 s + バネ)

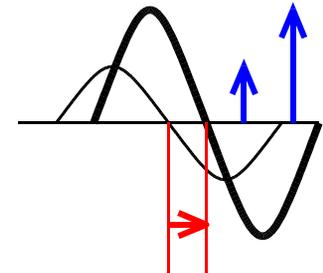
◇ s を $j\omega$ もしくは $2\pi f j$ に置き換えて計算

ω : 角周波数 f : 周波数 \uparrow 複素数

◇ 得た複素数の

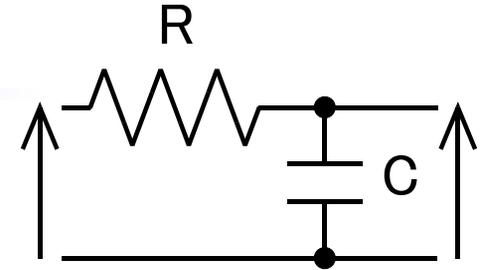
- ・ **大きさ**: 正弦波応答の **増幅率**
- ・ **偏角**: 正弦波応答の **位相**

になっている (面倒な証明に基づく便利な結論)



電子回路の周波数応答

○ アナログローパスフィルタ



◇コンデンサ

↓ 電流 $\times (1/s)$

両端の電圧 $v =$ 電流 i の積分 \div 容量 C

◇回路の解析

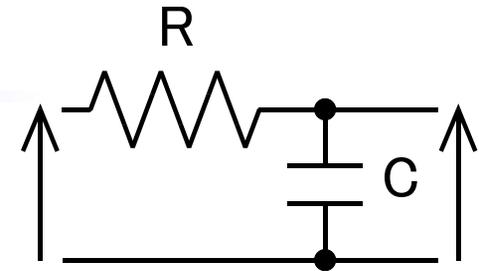
入力電圧 $=$ 抵抗 $R \times$ 電流 $+ (1/Cs) \times$ 電流

出力電圧 $= (1/Cs) \times$ 電流

$$\rightarrow \frac{\text{出力}}{\text{入力}} = \frac{(1/Cs)}{R + (1/Cs)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

電子回路の周波数応答

○ アナログローパスフィルタ



$$\frac{\text{出力}}{\text{入力}} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{1 + 2\pi RC f j}$$

◇ 周波数が低いとき : $f=0$ とする

伝達 = $1/(1+0)$ → 増幅率 : 1、位相 : 0

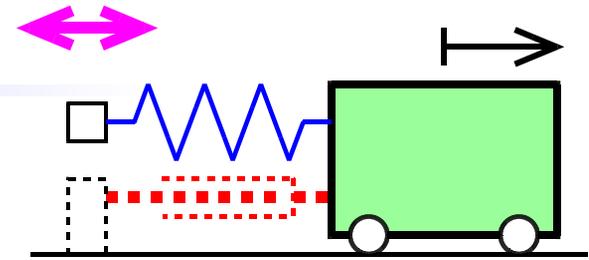
◇ 周波数が高いとき : f がとても大きい (1+を無視)

伝達 = $1/2\pi RCfj$ → ※ ↓ $1/j = -j$

増幅率 : $(1/2\pi RC f)$ 、位相 : $-90[\text{deg}]$

◇ 境界 : $1 = 2\pi RCf$ → $f = 1/2\pi RC$ (カットオフ)

機械振動の周波数応答



○ バネ－質量－ダンパ

◇伝達関数 = $\text{バネ} / (\text{質量}s^2 + \text{減衰}s + \text{バネ})$

簡単のために、ダンパの減衰係数 = 0

= $\text{バネ} / (\text{質量}s^2 + \text{バネ})$

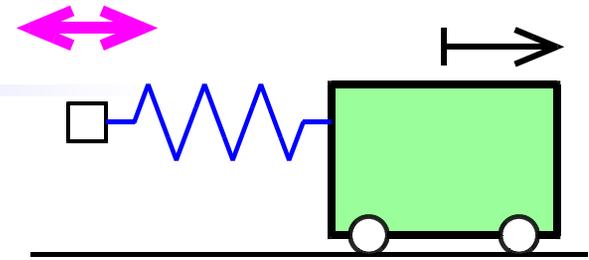
◇周波数が低い場合 $s = 2\pi f j = 0$ とする

= $\text{バネ} / \text{バネ} = 1$ ※同じ動き

◇周波数が高い場合 $s = 2\pi f j$ が大きいとする

= $\text{バネ} / (\text{質量}s^2)$ → どんどん小さくなる

機械振動の周波数応答



○ バネ－質量－ダンパ

◇伝達関数＝バネ／(質量 s^2 ＋バネ)

◇境界： $s = 2\pi f j = \sqrt{(\text{バネ} \div \text{質量})} \times j$ のとき

$$\text{質量} s^2 + \text{バネ} = -\text{バネ} + \text{バネ} = 0$$

→ ゼロで割る＝伝達関数は無限に大きい

→ **振動が非常に大きい** = **共振**

◇実際には減衰係数＝ゼロではない &

揺れが大きくなる前に「線形」ではなくなる。

補足：対数

○ 極端に大きさの変わるケースの処理

◇増幅率の変化 { 10倍、1倍、0.1倍、0.01倍 }

- ・これでは、0.1と0.01倍は違いが少ない。
が、「1/10にできる」「1/100」は性能が違う。
- ・ → 桁の違いを表記できるようにしたい

◇対数（常用対数@工学）

- ・ $y = 10$ の x 乗 に対して、 $x = \log_{10}(y)$
※ 数学的は \log_{10} 、工学では単に \log
- ・ $\log 100 = 2$ 、 $10 \rightarrow 1$ 、 $1 \rightarrow 1$ 、 $0.1 \rightarrow -1$ 、 $0.01 \rightarrow -2$

補足：対数とデシベル(dB)

○ 増幅率の表記に対数変換を使用

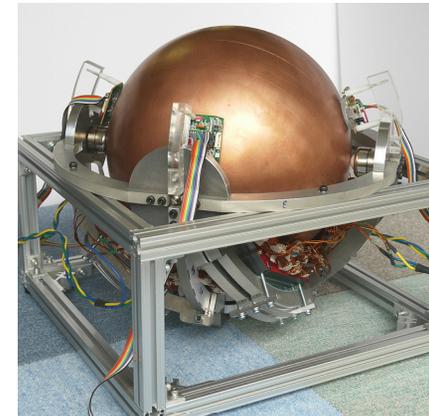
◇デシベルの定義（電力を除く）

- ・ デシベル値[dB] = $20 \times \log_{10}(\text{増幅率})$
- ・ 一般に、(狭い意味での)「ゲイン」と呼ぶ
- ・ $20[\text{dB}] = 10\text{倍}$ 、 $-20[\text{dB}] = 0.1\text{倍} = (1/10)$
 $40[\text{dB}] = 100\text{倍}$ 、 $-40[\text{dB}] = 0.01\text{倍} = (1/100)$
- ・ ※ $6[\text{dB}] = 2\text{倍}$ 、 $3[\text{dB}] = \sqrt{2}\text{倍}$
- ・ $10\text{倍} \times 100\text{倍}$ ※乗算は加算になる
→ $20[\text{dB}] + 40[\text{dB}] = 60[\text{dB}] = 1000\text{倍}$

【4】3次元空間での設計と解析

○ メカを3次元で設計するときのツール

◇ 題材：球面誘導モータ



○ 解析に必要な数学

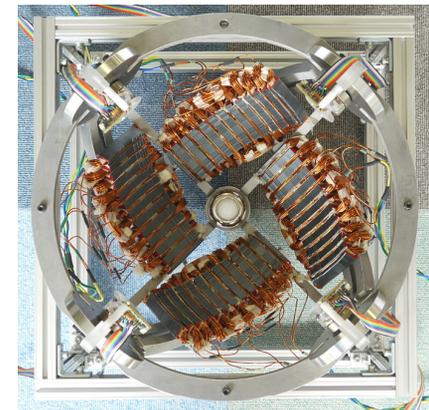
◇ 3次元の座標系

◇ ベクトル

大きさと方向を持つ矢印

◇ 行列

位置や方向の回転



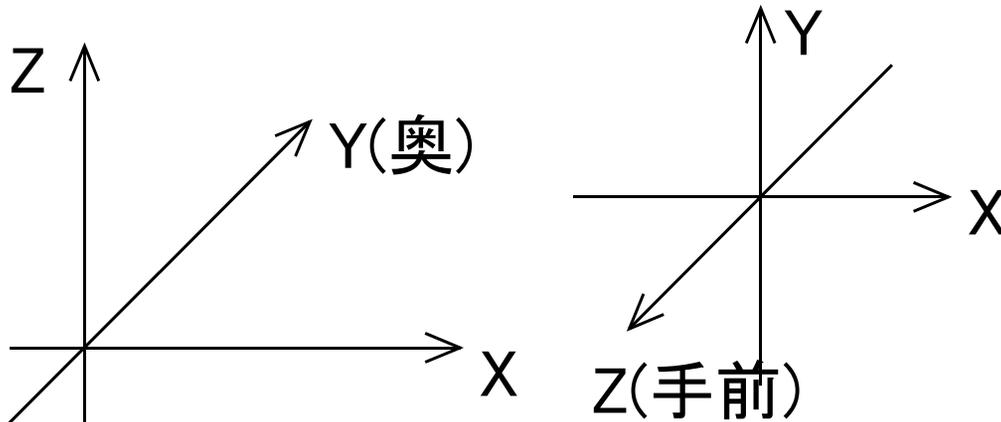
空間の座標系

○ 3本の直交する座標軸

◇軸の方向に要注意

- ・ 3本目の軸(z)は2本の軸(x,y)で決める。
- ・ 向きを間違えると各種計算で大トラブル。

※最初からすべて逆の設定もある



向きの関係:

- ① Xを回転させて Yに重ねる
- ② その回転で右ねじが進む向きに Z

行列とベクトル

○ 表記の方法

◇ベクトル(縦ベクトルと横ベクトル)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}^T = (v_x, v_y, v_z)$$

※右肩に“T”

◇行列(3×3)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

要素は
“ a_{ij} ”の形
 i :行 j :列

ベクトルの演算

○ 大きさ

◇ベクトルの大きさ

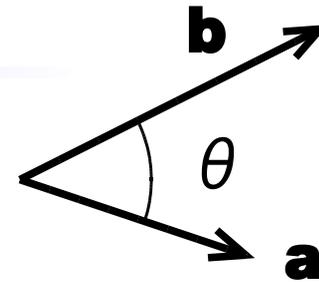
$$3\text{次元: } |\mathbf{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$

$$2\text{次元: } |\mathbf{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

◇単位ベクトル（大きさ1のベクトル）

- ・ $(1/|\mathbf{v}|) \mathbf{v}$ （大きさを割る）
- ・ 2次元のときは角度でも表せる
($\cos \theta, \sin \theta$)

ベクトルの演算



○ ベクトルの内積

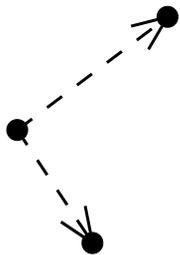
◇内積の計算

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad \text{※スカラ}$$

◇内積の性質

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta, \quad \theta \text{ はなす角}$$

$$\cos \theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} / |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$



→ ベクトルのなす角を計算できる

→ ゼロならベクトルは直角に交わる

※空間の2点→ベクトル→直交？

ベクトルの演算

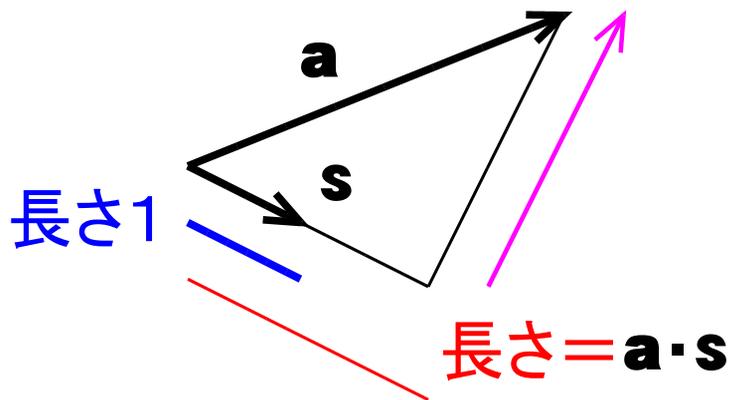
○ ベクトルの内積

◇内積の計算

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

◇単位ベクトルとの内積:「その方向の成分」

・ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}$: ベクトル \mathbf{a} の単位ベクトル \mathbf{s} 成分の大きさ



\mathbf{a} のうち \mathbf{s} を含まない成分

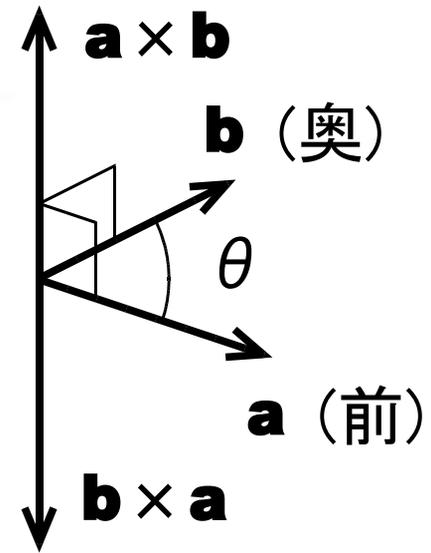
$$= \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{s}$$

ベクトルの演算

○ ベクトルの外積

◇ 外積の計算

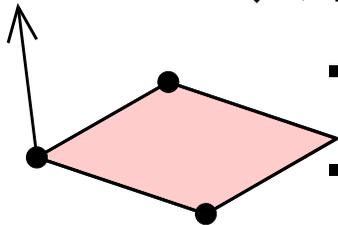
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



※ベクトル

◇ 外積の性質: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は \mathbf{a} , \mathbf{b} のどちらとも垂直

- ・ 二つのベクトルに直角な方向を出せる
- ・ 3点を通る平面に垂直な方向を出せる
- ・ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \rightarrow$ 面積

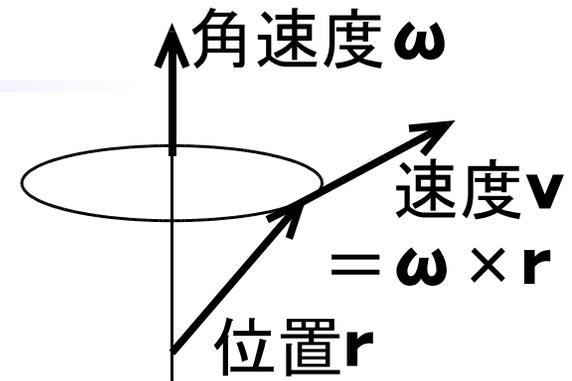


ベクトルの外積と回転運動

○ 角速度とトルク

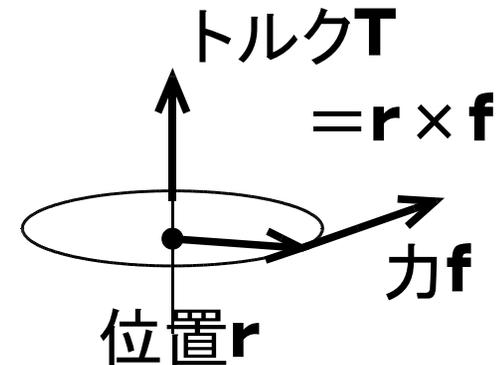
◇ 角速度ベクトル

- ・ 方向は回転軸、大きさは角速度
- ・ ある点の速度 = 角速度 × 軸上からの位置

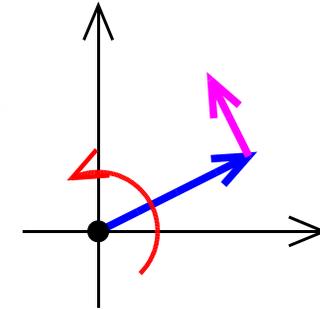


◇ トルクベクトル

- ・ 方向は回転軸
- ・ 大きさはトルク
- ・ トルクベクトル =
回転中心からの位置 × 力



ベクトルの外積と回転運動



○ 外積を2次元で使う

◇(x,y)平面での運動や力 と z軸周りの値

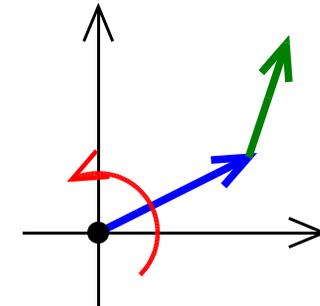
- ・ある点の速度 = 角速度 × 軸からの位置

$$\begin{aligned}(v_x, v_y) &= (\omega_y r_z - \omega_z r_y, \omega_z r_x - \omega_x r_z) \\ &= (-\omega_z r_y, \omega_z r_x)\end{aligned}$$

- ・トルク = 回転中心からの位置 × 力

$$T_z = r_x f_y - r_y f_x$$

※位置と力は直交の必要無し

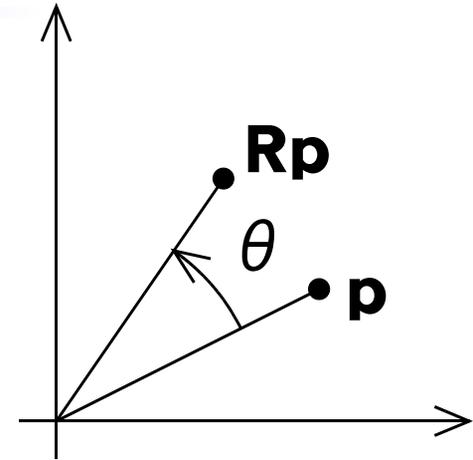


回転行列とベクトルの演算

○ 座標や方向を回転させる

◇ 回転行列 (2次元)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



◇ 回転行列による回転

$$\mathbf{Rp} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \cos \theta p_x - \sin \theta p_y \\ \sin \theta p_x + \cos \theta p_y \end{pmatrix}$$

回転行列とベクトルの演算

○ 座標や方向を回転させる

◇ 回転行列 (3次元)

$$\begin{array}{l} \text{Z軸まわり} \\ \mathbf{R} = \end{array} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{X軸まわり} \\ \mathbf{R} = \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

回転行列とベクトルの演算

○ 座標や方向を回転させる

◇ 回転行列 (3次元)

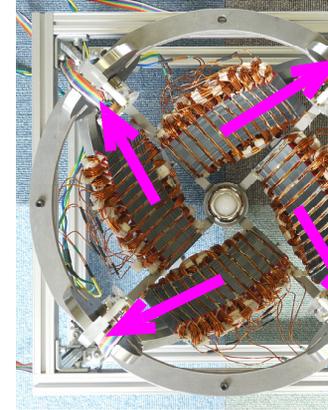
$$\begin{array}{l} \text{Y軸まわり} \\ \mathbf{R} = \end{array} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

◇ 計算方法は2次元と同様

◇ 回転する順番が重要

$$\text{例) } X \rightarrow Y \rightarrow Z \neq X \rightarrow Z \rightarrow Y$$

球面誘導モータのトルク生成解析



○ 基本原理

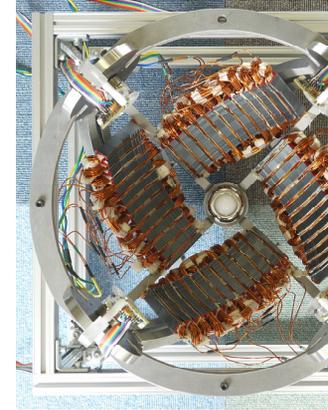
◇球面上のリニアモータ

- ・リニアモータが接線方向に推力を出す。
- ・推力→トルク の合計が全体出力。

◇計算すること

- ・リニアモータの配置（位置と接線方向）
- ・出力されるトルク
- ・必要なトルクのための推力設定

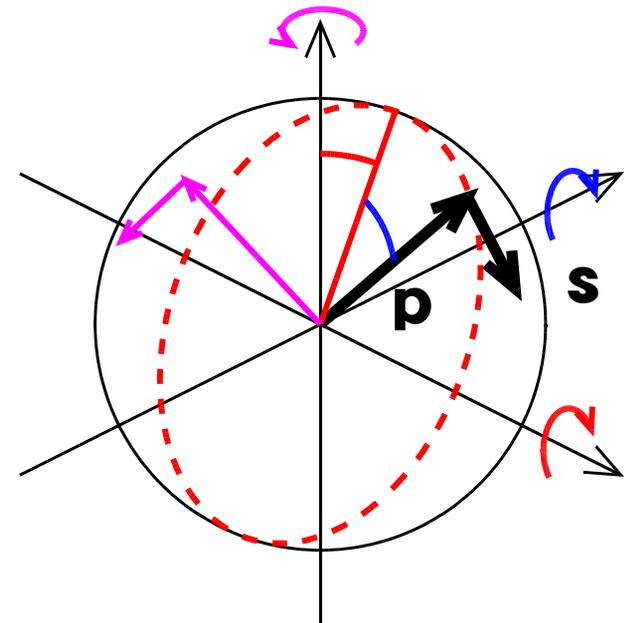
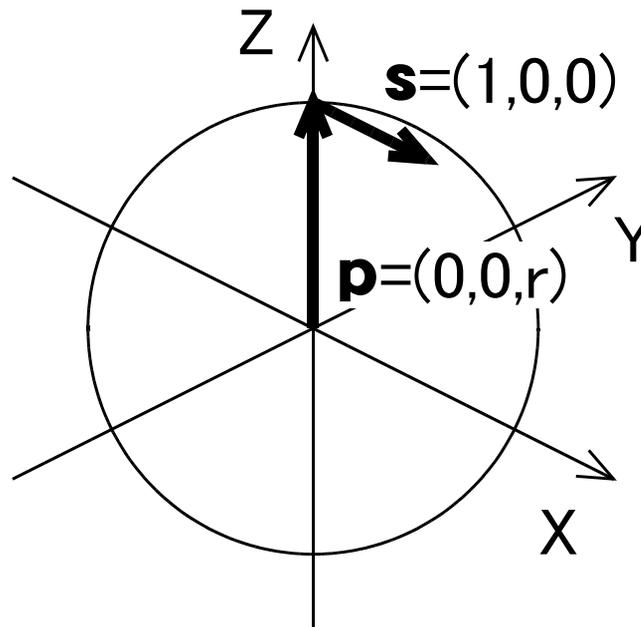
球面誘導モータのトルク生成解析



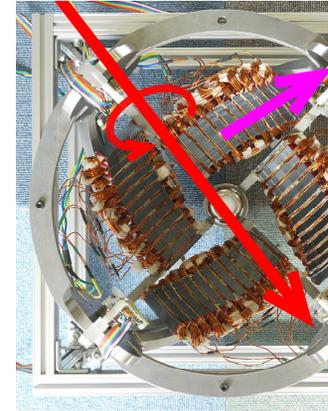
○ リニアモータの配置

◇ 設計パラメータは角度

- ・ 基本位置から位置と方向をセットで回転



球面誘導モータのトルク生成解析



○ トルクの計算

◇ 基本通り

- ・ リニア推力 \mathbf{f} = 推力指令 F ・ 接線 \mathbf{s}
- ・ 生成トルク \mathbf{T} = 位置 \mathbf{p} × 推力 \mathbf{f}
= $(\mathbf{p} \times \mathbf{s})F$ ※これをリニアの個数合計

◇ 逆演算

- ・ 逆行列、疑似逆行列という演算でトルク→各推力を求められる。

まとめ

○ メカトロと数学

- ・ 数学は便利な道具である。
 - ・ 大抵のことは数学で裏打ちされている。
 - ・ 数学をすべて学び直す必要は多分ない。
 - ① 実務に関連する理論、数式をチェック。
 - ② 使われている数学と解説を探す。
 - ③ さらに不明点を探していく。
- ※技術の習得と同じ手順
- ・ 全体の概略は知っておいたほうが良い。

まとめ

○ 主要な「役立つ数学」

&ピュアな波

- ・ 三角関数は「回転軸あるところすべて」。
- ・ 微分は「変化を伴うところ」に関わりあり。
- ・ 表計算である程度の機構解析できる。
- ・ ラプラス変換そのものは難解な数学であるが、活用するだけなら難しくない。
※数学書よりは制御の入門書などを探す
- ・ ベクトルと行列は「立体的ものづくり」の強力なツールである。