仙台市/仙台市産業振興事業団

ロボット博士の基礎からのメカトロニクスセミナー

C17/Rev 1.0

第17回

メカを動かす基本法則

仙台市地域連携フェロー

熊　谷　正　朗

kumagai@tjcc.tohoku-gakuin.ac.jp

東北学院大学工学部
ロボット開発工学研究室 RDE

今回の目的

○　メカを理解するための法則の基礎

テーマ1：個々の概念の解説

- 基本法則と単位
- 運動の法則
- 力、仕事、エネルギー

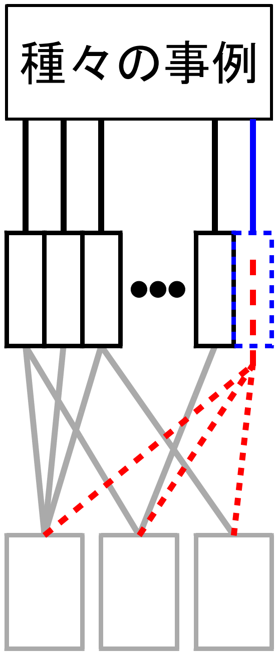
テーマ2：具体事例にみる法則の適用

- 台形加減速の意義と計算
- 車輪走行ロボットの動力計算
- バドミントン練習ロボットの運動計算

基本法則の理解・再確認

○ シンプルなルールで多くを説明

◇基本法則の特徴



・なるべく少ないルールの組み合わせ

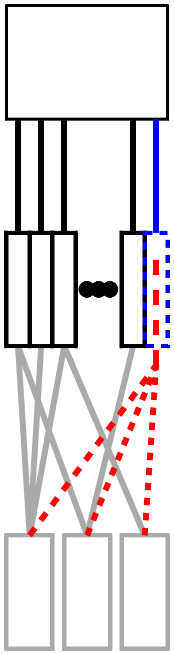
・実は、「理解すべきこと」は少ない。

・個々の状況ごとの説明ではないため、
「調べても見つからない」型トラブルが
発生しにくい。

※考えてもわからない、はあり得る

基本法則の理解・再確認

○ 個別の専用計算式 VS 基本法則



◇専用計算式

○ 指定の数値を入れれば、答えが出る。

△ 少しでも形式が外れると使いにくい。

× 間違った条件で使うと大きな差異。

◇基本法則

○ 適用方法を理解すれば、多くの応用。

○ 新しいアイデアも検討しやすい。

× 本質を理解して、計算を積み上げる手間。

基本法則のための単位

○ 国際単位系（SI単位系）

◇7種の基本単位　：　すべての単位の元

- 時間　　[s，秒]
- 長さ　　[m，メートル]
- 質量　　[kg，キログラム]
- 電流　　[A，アンペア]
- 熱力学温度 [K，ケルビン]
- 物質量　[mol，モル]
- 光度　　[cd，カンデラ]

基本法則のための単位

○ SI組立単位

◇定義に従い基本単位の組み合わせで構成

- 面積　[m^2, 平方メートル]
- 体積　[m^3, 立方メートル]
- 速さ　[m/s, メートル毎秒]
- 密度　[kg/m^3, kg毎立方メートル]

◇専用の名称がある場合の例

- 力　[kgm/s^2] ＝ [N, ニュートン]
- 圧力　[N/m^2] ＝ [Pa, パスカル]

基本法則のための単位

○ SI接頭辞 (接頭語)

◇単位の桁を変える (10^{-24}～10^{24})

・km ＝ 1000m,　　mm ＝ 0.001m

◇よく使う接頭辞

・k (キロ)=10^{3}=1000倍

・M (メガ)=10^{6}=100万倍

・m (ミリ)=10^{-3}=1000分の1, 0.001

・μ,u (マイクロ)=10^{-6}=100万分の1　0.000001

基本法則のための単位

○ SI接頭辞 （接頭語）

◇よく使う接頭辞

・k,M,m, μ (u)

・da （デカ） $=10^{1}=10$

・h （ヘクト） $=10^{2}=100$

・G （ギガ） $=10^{9}=10$億

・T （テラ） $=10^{12}=1$兆

・d （デシ） $=10^{-1}=0.1$

・c （センチ） $=10^{-2}=0.01$

・n （ナノ） $=10^{-9}$

・p （ピコ） $=10^{-12}$

◇使用例

hPa(ヘクトパスカル)、ha(ヘクタール)、dB(デシベル)、
daN(デカニュートン)、{dl, cl, ml, ul, pl ： リットル}

基本法則のための単位

○ 基本法則を使うときは接頭辞なしで

◇単位は「へんな係数」が不要な定義

・力 1[N] ＝ 質量 1[kg] × 加速度 1[m/s^2]

◇接頭辞の混乱を避けられる

・電力 1[W] ＝ 電圧 1[V] × 電流 1[A]

→ 1[mV]×1[mA] ＝ ？　1[mW]？ ×NG

→ 10^{-3}[V]×10^{-3}[A] ＝ 10^{-6}[W] (=1[μW])

◇日常的な単位の換算

・時、分→秒　度、分、秒(、回転)→ラジアン

用語・単位・解説

○ 質量と重量

◇質量 [kg]

・ある意味、「重さ」

・物体の動きにくさなどを表す数値

・万有引力の大きさに影響する数値

・上皿天秤で測定される。

◇重量 [N] [kgf] ※力であって、[kg]ではない

・物体が地球に引かれる力の大きさ

・バネばかりで測定される。

用語・単位・解説

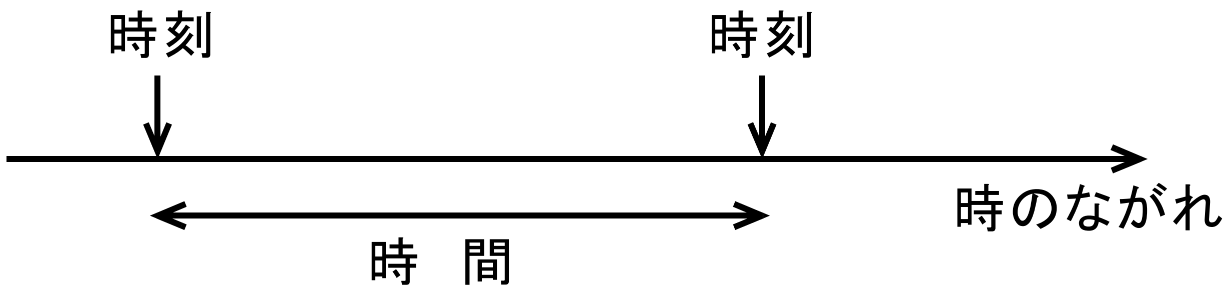
○　時間と時刻

◇時刻［s］

・時の流れの中の一点を指す

◇時間［s］

・時刻と時刻の間隔



用語・単位・解説

○ 運動関係（直線運動）

※単位○○＝1

◇速さ・速度 [m/s]

・単位時間あたりの移動距離、位置の変化

・「速度」というと、方向を含む解釈がある。

◇加速度 [m/s^2] ([(m/s)/s])

・単位時間あたりの速度の変化

◇力 [N = kg m/s^2]　※[ニュートン]

・後述の運動の法則によって定義

用語・単位・解説

○　運動関係（回転運動）

◇角度［rad，ラジアン］　　※日常では度(deg)

・360度＝２πラジアン（π＝円周率，約3.14）

・数値は半端ながら、法則がすっきりする。

・[rad]は「比」なので、本来は[m/m]。

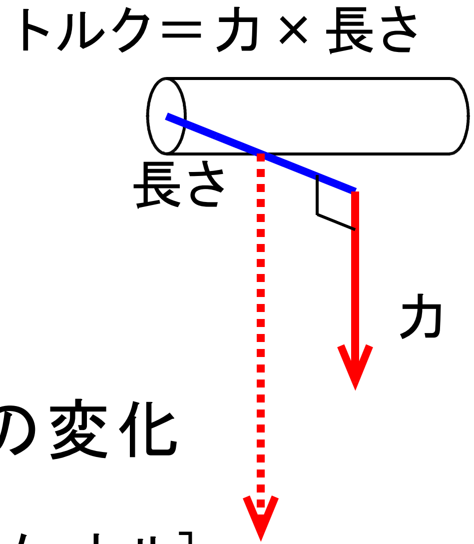
そのため、[rad]が消えることがある。

◇角速度［rad/s］　　※deg/sもよく使われる

・単位時間あたりの角度変化

用語・単位・解説

○ 運動関係（回転運動）



◇角度 [rad, ラジアン]

◇角速度 [rad/s]

◇角加速度 [rad/s²]

・単位時間あたりの角速度の変化

◇トルク [Nm]　　※[ニュートン メートル]

・軸などを回転させる力 ＝力×長さ

◇慣性モーメント [kgm²]

・回転における質量にあたるもの(後述)

用語・単位・解説

○ 運動と数学

◇(時間で)微分

・瞬間ごとの時間変化を求めることに相当。

位置を時間微分 → 時々刻々の速度

速度を時間微分 → 時々刻々の加速度

◇(時間で)積分

・微分の反対の作業

・角速度を時間積分 → 角度

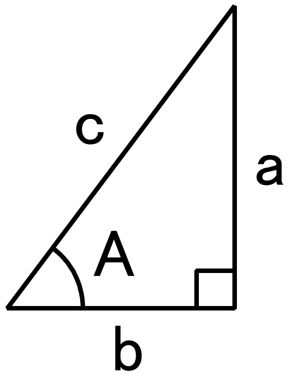
※実際には「積分した範囲での変化を積算したもの」

用語・単位・解説

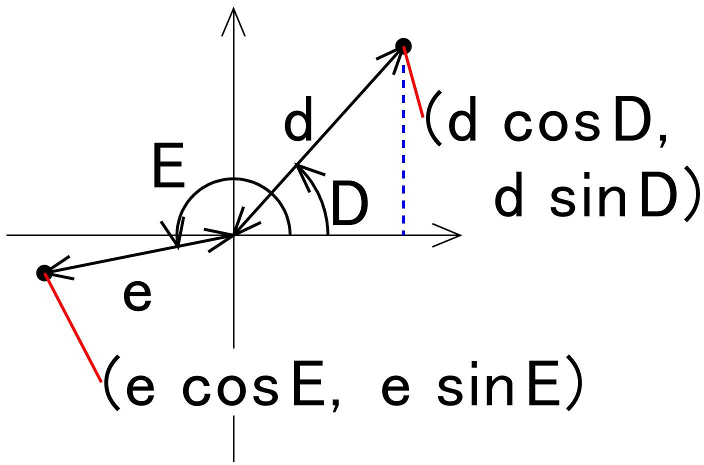
○ 三角関数

◇角度と座標の関係を表せる

- sin(正弦)、cos(余弦)、tan(正接)
- および逆関数 $\sin^{-1}$、$\cos^{-1}$、$\tan^{-1}$ (atan)



$$\sin A = a/c$$
$$\cos A = b/c$$
$$\tan A = a/b$$

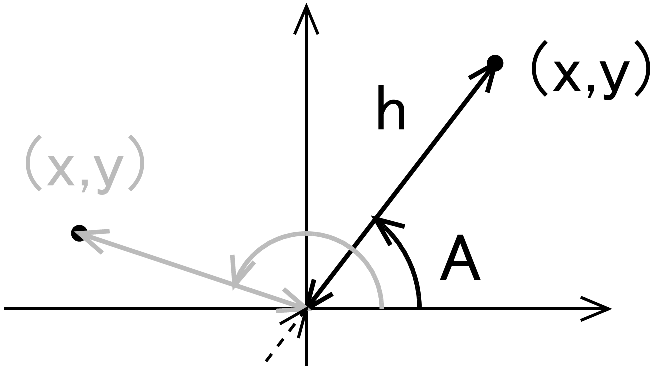


用語・単位・解説

○ 三角関数

(a cos A ＋ b cos(A+B),
a sin A ＋ b sin(A+B))

◇応用例

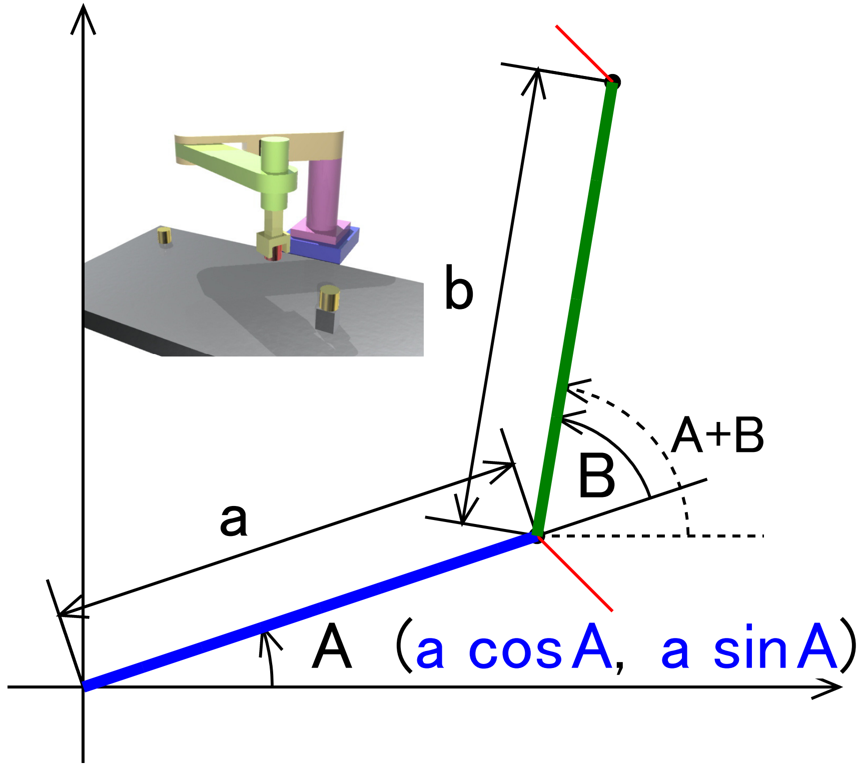


$$h = \sqrt{(x^2+y^2)}$$

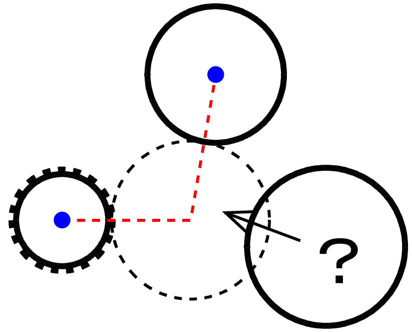
$$A = \tan^{-1}(y/x)$$

$$A = \mathrm{atan2}(y,x)$$

or atan2(x,y)

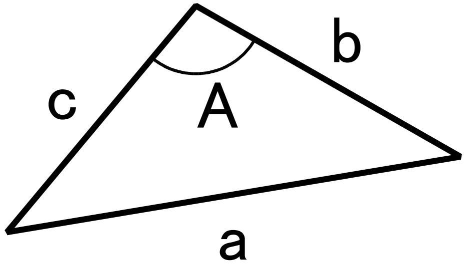


用語・単位・解説

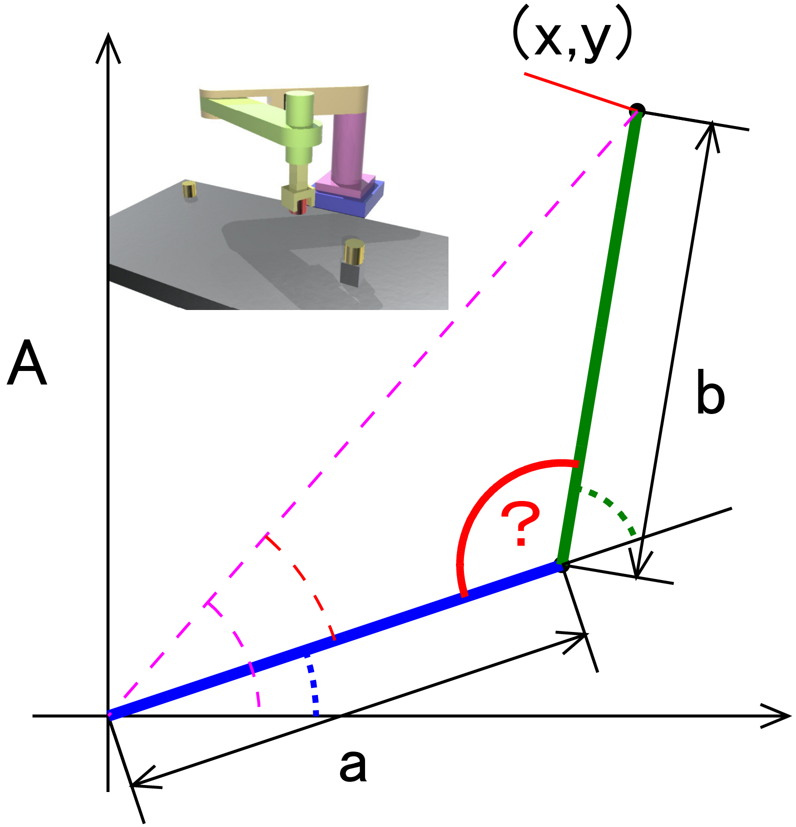


○ 三角関数：余弦定理

◇3辺と角度



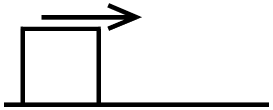
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$
- $A = \cos^{-1}\{(b^2 + c^2 - a^2)/2bc\}$



運動の法則

○ 物体の運動の基本 （※身の回りレベルで）

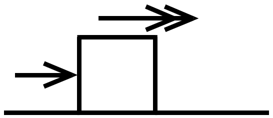
◇1：慣性の法則



・外部から力がかからなければ、速度不変

※静止している→静止のまま、移動中→等速直線運動

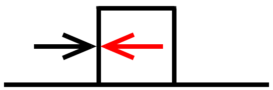
◇2：運動の法則



・物体が力を受けると加速度が生じる。

・加速度は力に比例し、質量に反比例

◇3：作用反作用の法則



・力を作用させると、逆方向に力を受ける。

運動の法則

○ 運動の第２法則

◇加速度は力に比例、質量に反比例

・力が大きいほど加速する。

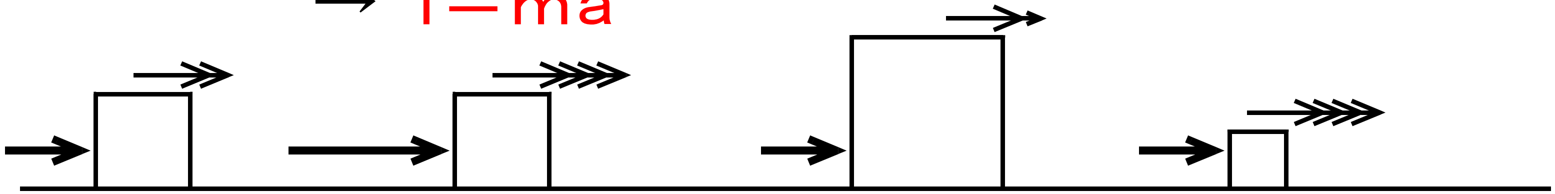
・質量が大きい(≒重い)ほど、加速しにくい。

・加速しにくい ＝ (一般的表現で)減速しにくい。

・（加速度） ＝ （力） ÷ （質量）

→ （力） ＝ （質量） × （加速度）

→ f＝ma



運動の法則　回転の場合

○　直線の場合との類似性

◇ある軸周りに回転しているものは、外部からの作用がなければ、角速度は維持される。

◇軸にトルクが作用する場合、角加速度が生じる。

・トルクに比例し、慣性モーメントに反比例

・トルク［Nm］＝ 慣性モーメント［kgm^2］× 角加速度［rad/s^2］

※$[kgm^2 \times rad/s^2] = [kgm^2/s^2] = [kgm/s^2 \cdot m] = [Nm]$

※明確に運動の軸がない場合はかなり複雑

運動の法則　回転の場合

○ 慣性モーメント

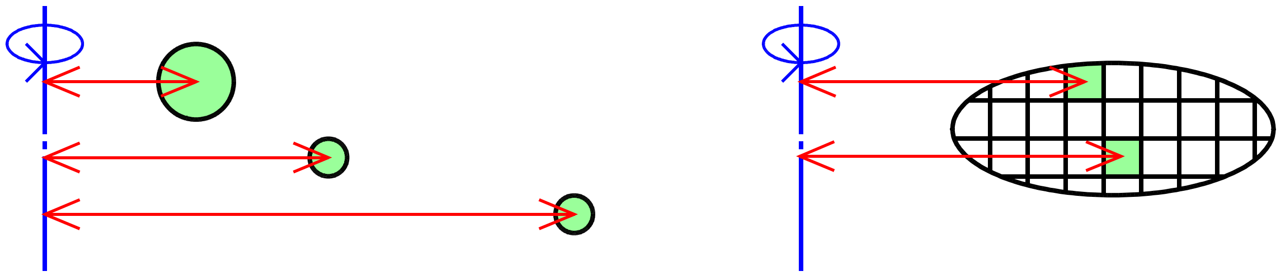
◇回転の質量にあたる量

◇定義・計算

・軸周りに回転するものを細切れにする

→（小片の質量）×（軸からの半径$)^2$

→ すべてを合計する



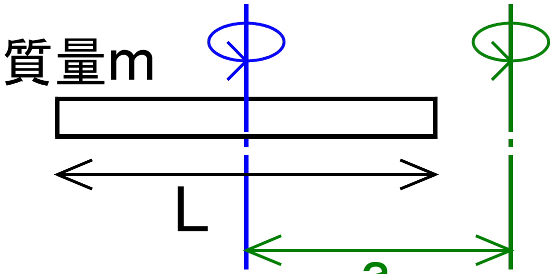
運動の法則　回転の場合

○ 慣性モーメント

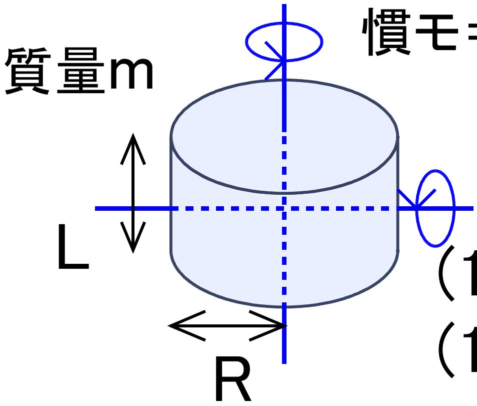
◇回転の質量にあたる量

◇定義・計算

・棒、円筒や直方体など、主要な物体の慣性モーメントは計算式がある。



慣モ＝$(1/12)mL^2$ $(+ma^2)$



慣モ＝$(1/2)mR^2$

$(1/4)mR^2 + (1/12)mL^2$

運動の法則　回転の場合

○ 慣性モーメント

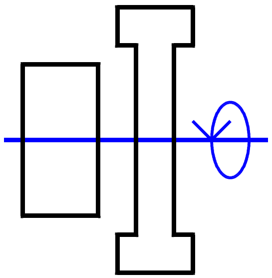
◇回転の質量にあたる量

◇性質

・小さいほど、回転の加減速がしやすい

→ 急峻な動きをするものは小さく

※これは直線運動の質量と同じ



・大きいほど、回転の変動が少ない

→ はずみ車などの用途

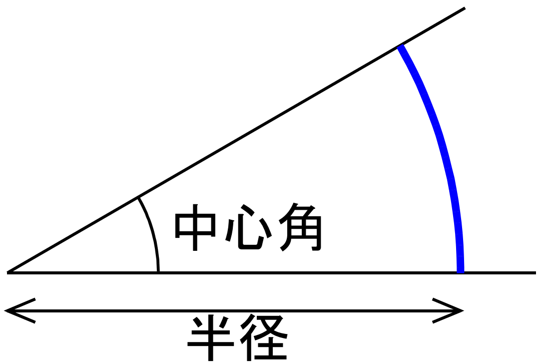
→ 同質量なら外周に寄せる

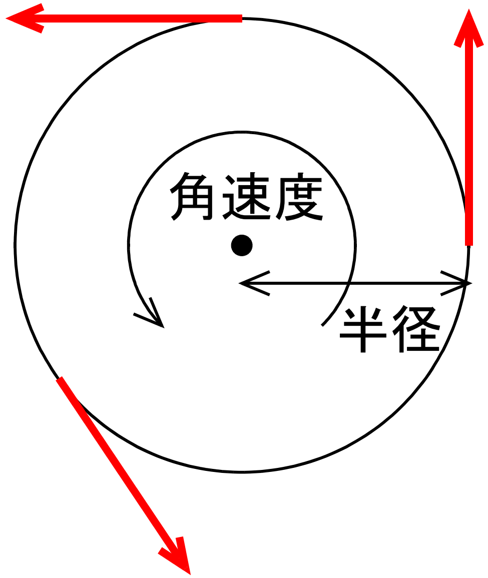
回転運動と直線運動

○ 図形的関係

◇円弧の長さ[m] ＝ 半径[m]×中心角[rad]

◇周速度[m/s] ＝ 半径[m]×角速度[rad/s]



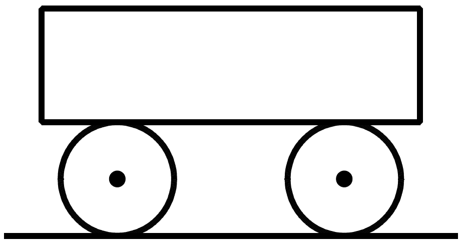


回転運動と直線運動

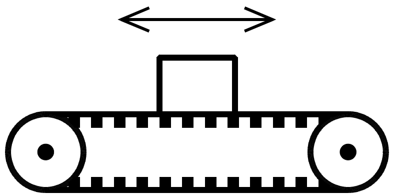
○ 使用例

◇円弧の長さ[m] ＝ 半径[m]×中心角[rad]

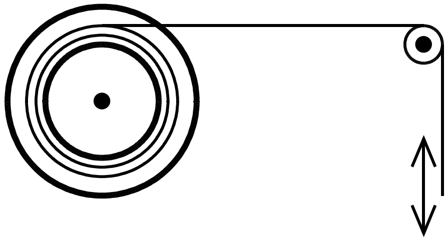
◇周速度[m/s] ＝ 半径[m]×角速度[rad/s]



車輪の回転 と
車両の移動距離/速度



ベルトものの
速度の計算



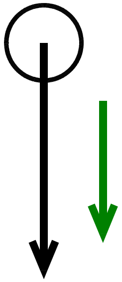
ワイヤドラムの
回転と送り速度

物体に作用する力　重力

○ 重力

◇メカトロで最も大きな影響を持つ力

◇計算式



重力[N] ＝ 質量[kg]×重力加速度[m/s^2]

f＝mg

◇重力加速度

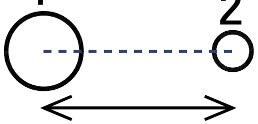
・「重力(重量)は質量に比例する」の比例係数。 結果的に加速度の単位に。

・約9.8 ～地域によって異なる

物体に作用する力　重力

○　重力加速度の正体

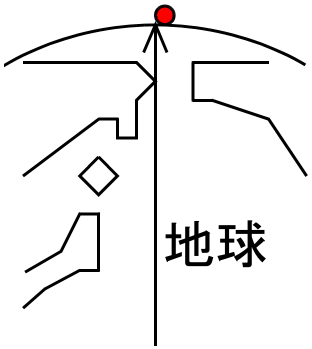
◇万有引力　　　　$f = GMm/R^2$



・(万有引力定数)

×(物体1の質量)×(物体2の質量)

÷(物体1、2間の距離)^2



・(定数)×(地球質量)×(物体質量)÷(地球半径)^2

＝(物体質量)

×((定数)×(地球質量)×(半径)^2)

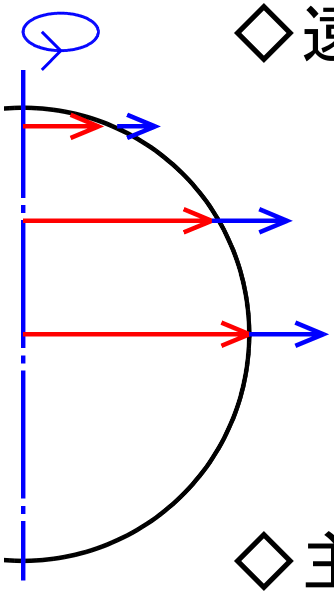
＝(物体質量)×(万有引力による加速度)

物体に作用する力　重力

○ 重力加速度の正体

◇万有引力

・足下の組成などで微妙に変わる



◇遠心力

・地球の自転に伴う遠心力＝赤道で大

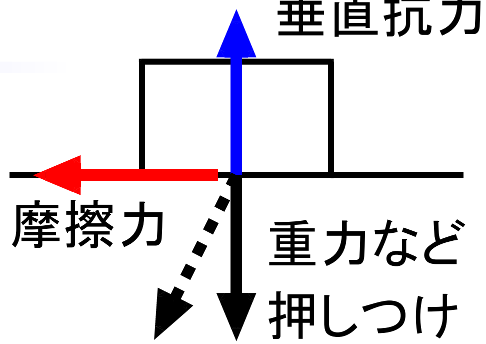
・(質量)×(半径)×(角速度)^2

＝(質量)×((半径)×(角速度)^2)

＝(質量)×(遠心力による加速度)

◇主にこれらの合計

物体に作用する力　摩擦力



○ 接触面に働く力

◇大きさ

(最大で)摩擦係数×垂直抗力

垂直抗力＝接触面を(から)垂直に押す力

斜め方向の力の場合、垂直な分のみ

◇方向

- 滑っていない場合：その他の力の反対
- 滑っている場合：運動方向と反対

物体に作用する力　摩擦力

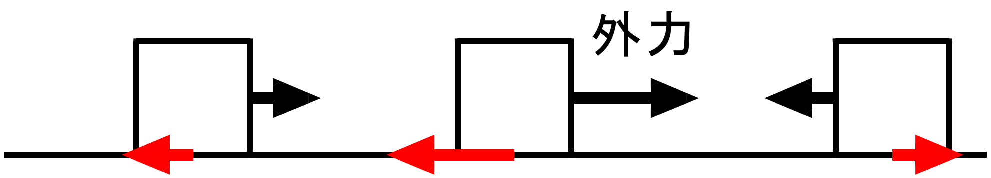
○　静摩擦力

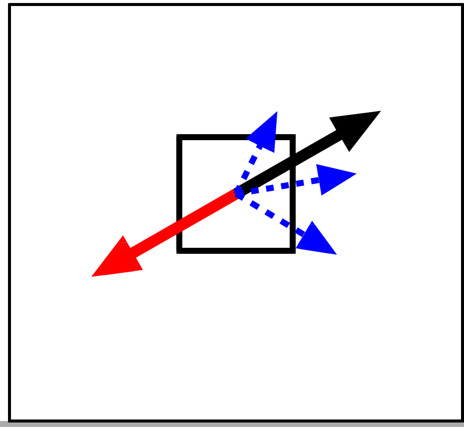
◇大きさ

【最大で】静摩擦係数×垂直抗力

◇方向

・その他の力の合計　の　反対方向





物体に作用する力　摩擦力

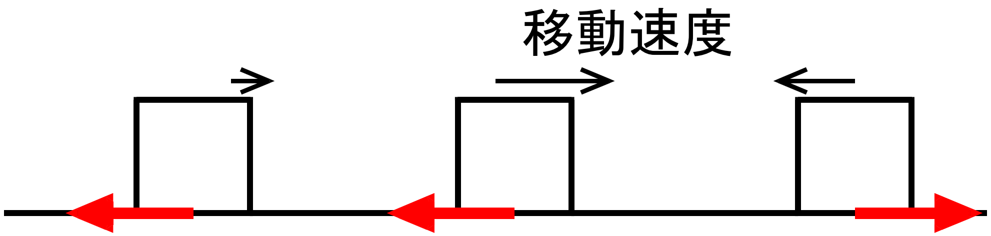
○　動摩擦力

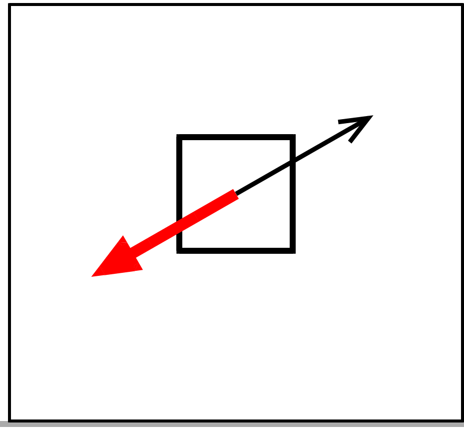
◇大きさ

動摩擦係数×垂直抗力　（速さによらない）

◇方向

・運動の反対方向



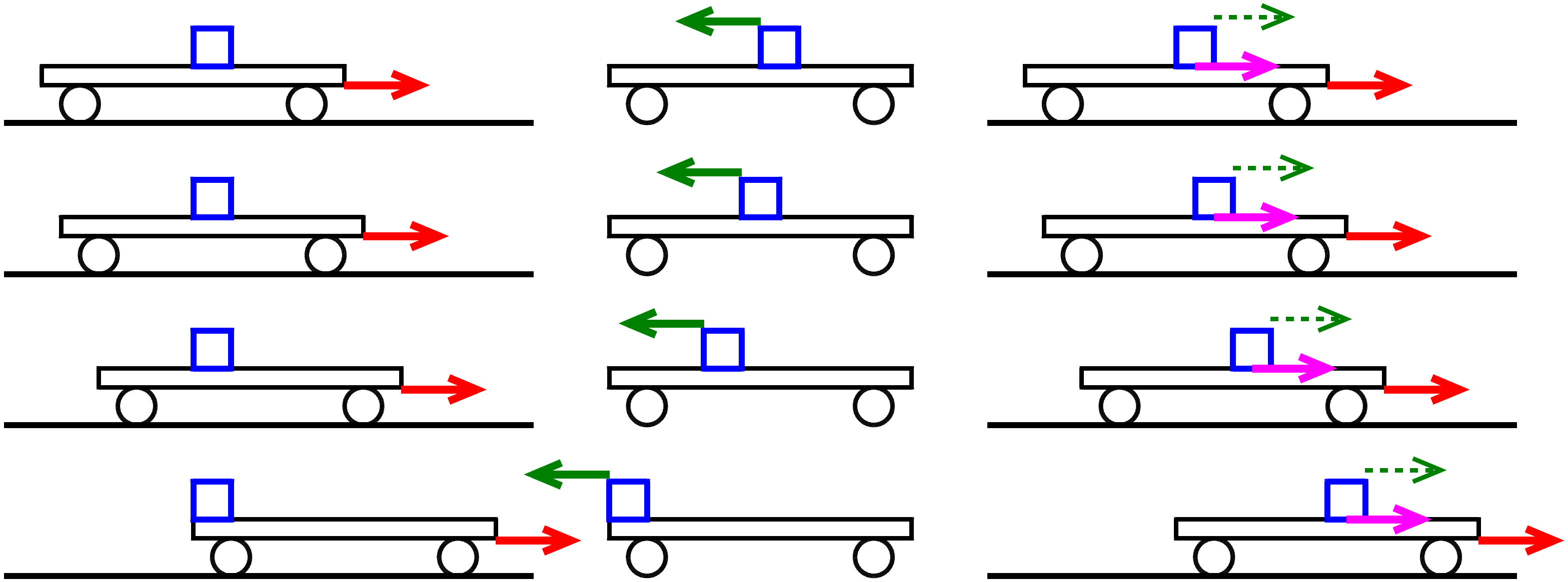


物体に作用する力　慣性力と遠心力

○ 周りの動きにより生じる見かけの力

◇慣性力の例

・周りが動くから ／ 周りと共に動くには

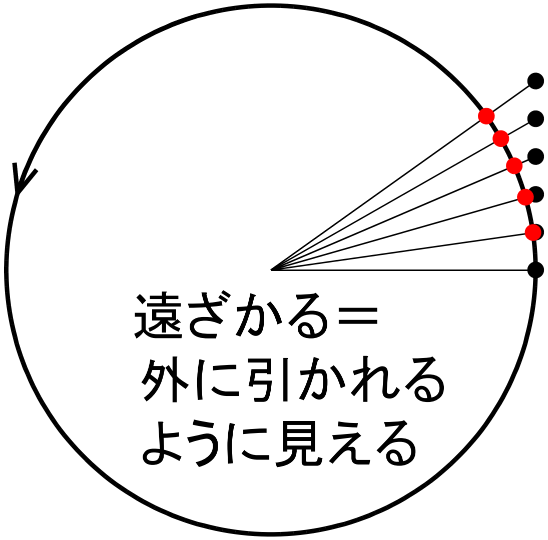


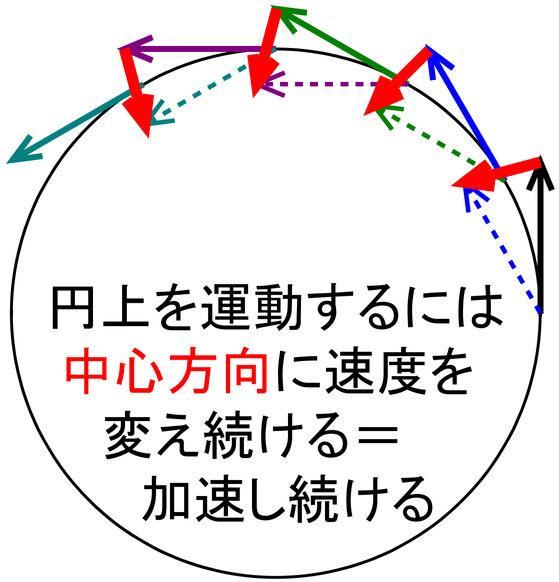
物体に作用する力　慣性力と遠心力

○ 周りの動きにより生じる見かけの力

◇遠心力・向心力

・円軌道 VS 慣性による直進

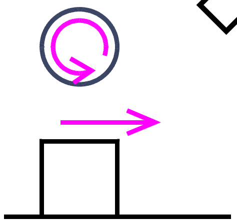




仕事とエネルギー

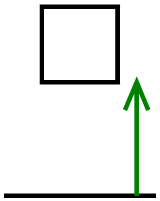
○ エネルギー　[J]＝[Nm]

◇物理的に仕事できる能力



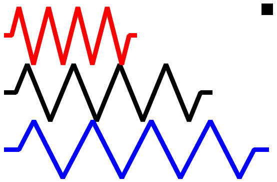
・運動エネルギー

速度をもつ物体が持つ



・重力による位置エネルギー

高いところにある物体が持つ



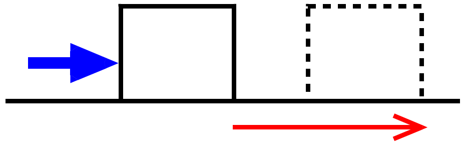
・バネによる位置エネルギー

伸びた/縮んだバネが持つ

・他：熱、化学、電気他

仕事とエネルギー

○ 力学的な仕事　[J]＝[Nm]



◇計算：

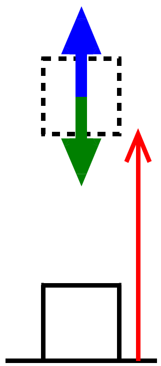
作用する力[N]×移動距離[m]

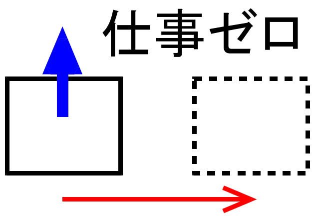
※方向が一致しない場合は一致する分を計算

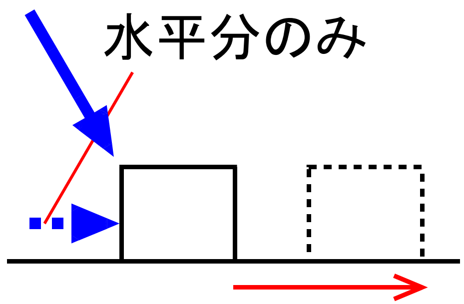
◇例：

・重力を支えながら、持ち上げる

・バネを押し縮める







仕事とエネルギー

○ エネルギー

◇物理的に仕事できる能力 [J]＝[Nm]

◇エネルギーと仕事

・他者への仕事

→ エネルギーが減少

※速度減、位置低下、バネ緩む

・他者から仕事を受ける

→ エネルギーが増加する

※速度増、位置上昇、バネ変形

仕事とエネルギー

○ 運動エネルギー

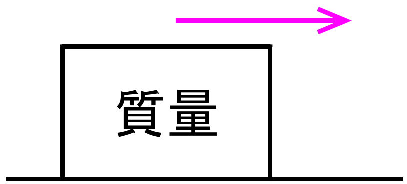
◇直線運動

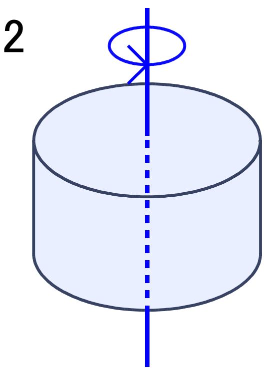
(1/2)(質量[kg])×(速度[m/s])^2

◇回転運動

(1/2)(慣性モーメント[kgm^2])

×(角速度[rad/s])^2





仕事とエネルギー

○ 位置エネルギー

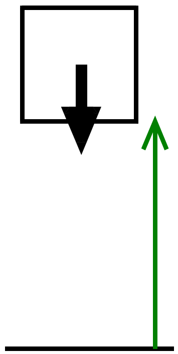
◇重力による位置エネルギー

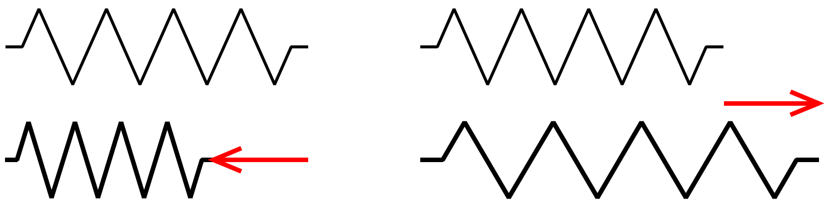
(重力[N])×(基準からの高さ[m])＝

(質量[kg])×(重力加速度[m/s^2])×(高さ[m])

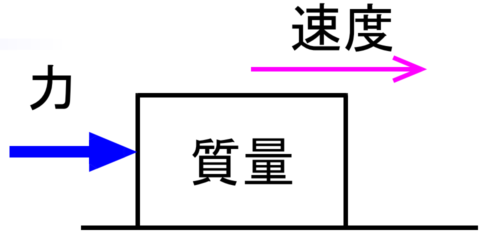
◇バネの変形による位置エネルギー

(1/2)(ばね定数[N/m])×(変形量[m])^2





仕事とエネルギー



○ 動力・仕事率

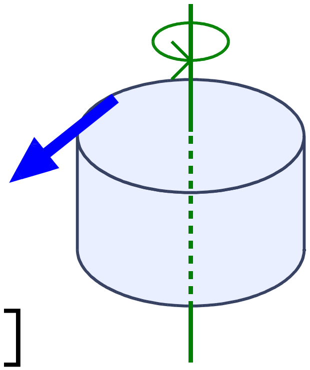
◇単位時間あたりの仕事

仕事率・動力 [W =J/s=Nm/s]

＝仕事[J (Nm)] ÷ 時間[s]

＝力[N] × 移動速度[m/s]

＝トルク[Nm] × 角速度[rad/s]



◇動力と電力

・効率100%のアクチュエータに入れた

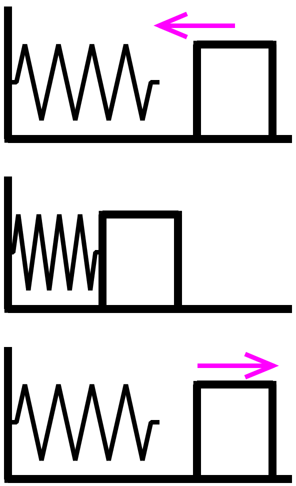
電力[W] は そのまま 出力動力[W] に

仕事とエネルギー

○ エネルギー・動力計算の活用

◇事例：バネの大きさ計算

・目的：　ある速度の物体を受け止めて、反対方向に押し返すバネの選定する。



・運動エネルギーを計算する。

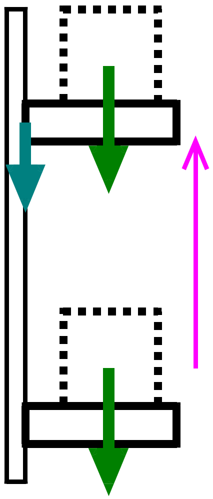
・圧縮のストロークを仮に定めて、運動エネルギーに対応するばね定数を計算。

・ばね定数とストロークからばねを選定
→ストロークの調整

仕事とエネルギー

○ エネルギー・動力計算の活用

◇事例：エレベータ機構のモータ



・可動部分の質量を算出する。

・重力と摩擦力などを見積もる。

・可動部分の仕様速度を定める。

・動力[W]＝重力など[N]×速度[m/s]
が、モータに要求される動力。

・ある程度の係数をかければ消費電力。
※減速機は損失を無視すれば動力変わらず

法則の適用事例

○　具体的な計算例

◇台形加減速・S字加減速

・なにのために必要か

・台形加減速の計算

◇車輪走行ロボットの動力計算

・力の見積　と　モータ、減速比　の検討

◇バドミントン練習ロボットの運動計算

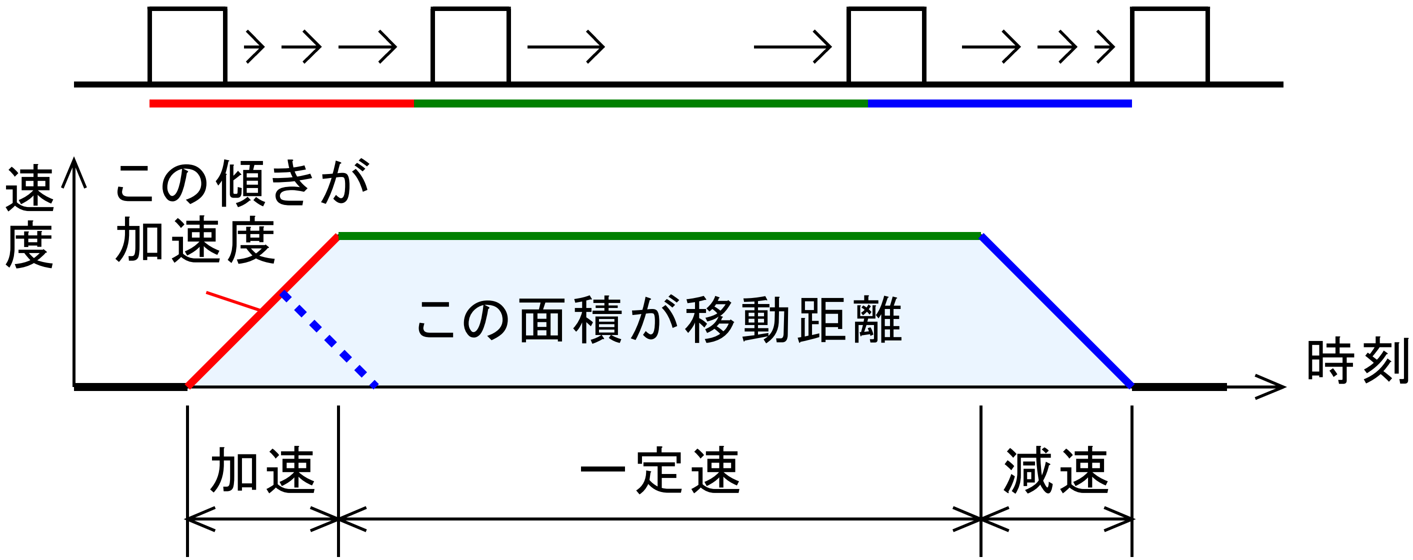
・回転部分の設計概念

・慣性モーメントの計算とモータの回転

台形加減速

○ 台形加減速とは？

◇一定速度の運動の前後に、加速･減速区間
◇直線運動でも回転運動でも用いる



台形加減速

○ 加減速動作の目的

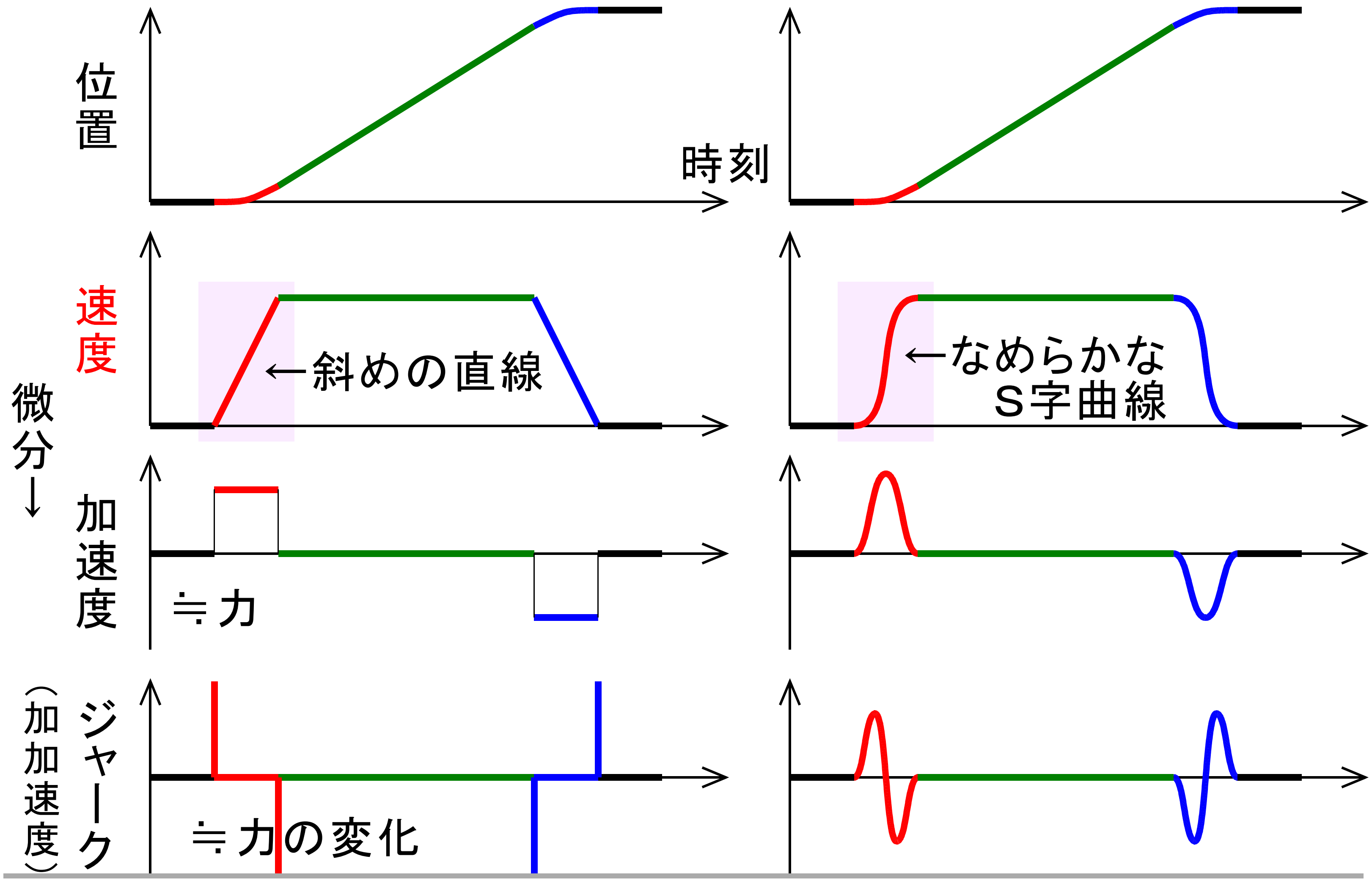
◇慣性力の低減

・もしも、いきなり目標速度を出したら？
→ 速度が短時間で急に変化する
→ 加速度が大きい ＝ 大きな力が必要

・敢えて、加速度を押さえることで、
適切に加速の力を低減する。

・DC, ACモータ：加速時の不安定さを低減
・ステッピングモータ：脱調防止

台形加減速とS字加減速



台形加減速とS字加減速

○ 加速度の時間変化の比較

◇ジャーク（躍度，加加速度）

・加速度の微分(時間変化)

≒ 各部にかかる力の時間変化

◇比 較

・加速度： 台形は一定、S字は変化

・ジャーク： 台形はスパイク状、Sは滑らか

→台形は急な変化で振動誘発

※乗り心地の悪さも類似の現象

台形加減速

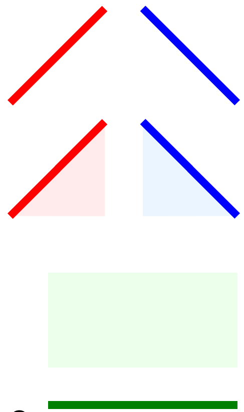
高級なコントローラでは
自動計算してくれる

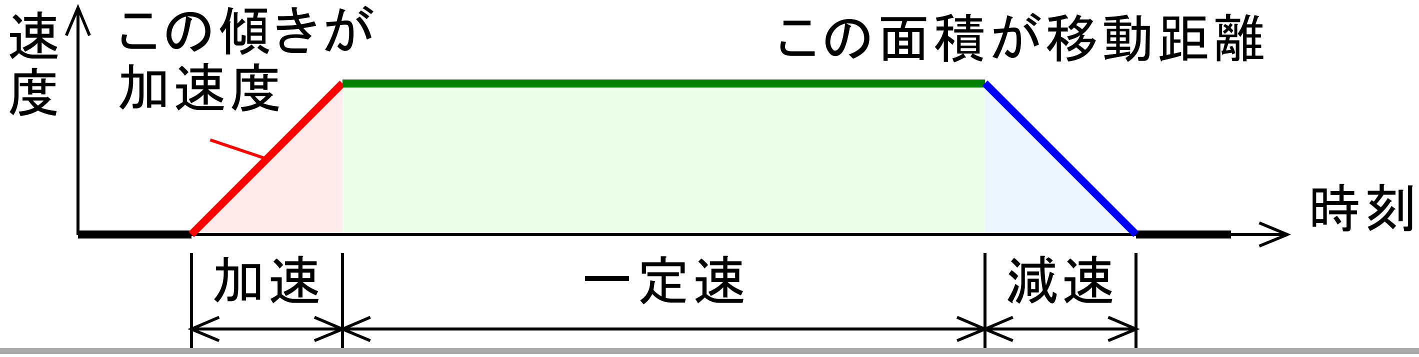
○ 台形加減速の計算

・加速度を決める（トルクなどから）

・加減速部の面積を求める＝移動量

・目標の移動距離からこれを引いて、
一定速度で移動する時間を計算する。





車輪移動ロボットの動力計算

○ 目標仕様

◇車体質量　搭載物込み

100[kg]

◆移動速度

1 [m/s]程度

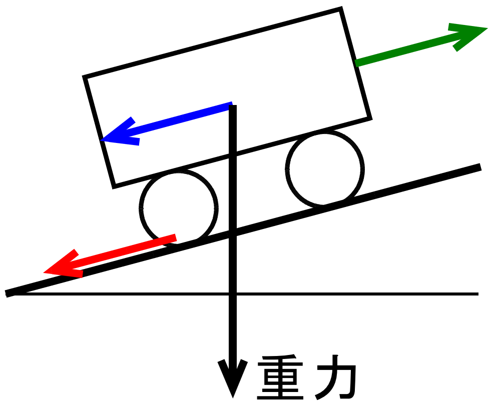
◆ある程度の傾斜を走れる

傾斜 15[deg]

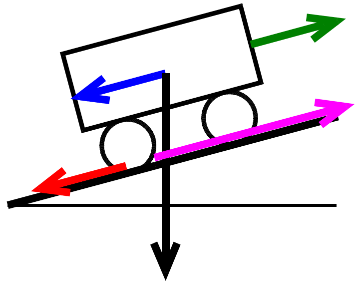
◆ある程度の悪路を走れる

走行抵抗係数 0.2

※摩擦と似た扱い



車輪移動ロボットの動力計算



○ 必要な推進力の計算

◇車体質量　搭載物込み　100[kg]

◆傾斜15[deg]で受ける重力

100×9.8×sin(15deg) ≒ 250[N]

◆走行抵抗、係数 0.2

100×9.8×0.2 ≒ 200[N]

※15deg斜面であれば、「×cos(15deg)」だが大きな差はない

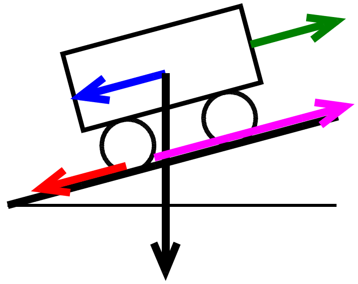
◆走行に必要な推進力

250＋200 ＝ 450[N]

※駆動に必要な車輪の摩擦力は考慮していない

※ただし、加減速に必要な分は含まれず

車輪移動ロボットの動力計算



○ 必要な動力の計算

◆移動速度　1[m/s]

◆走行に必要な推進力　　450[N]

◇動力＝速度×力　＝　1×450　＝　450[W]

　→　計算上は定格500[W]程度のモータ

【注】簡単のためメカ効率100%

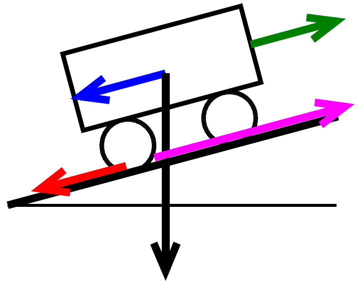
◇モータの例:

山洋電気　直流サーボモータ　T850

定格トルク　　1.76[Nm]

定格回転　　2500[rpm]

車輪移動ロボットの動力計算



○ 必要な減速比の計算

◆移動速度　1[m/s]　　◆推進力　　450[N]

◇モータ　　トルク　1.76[Nm]、 回転　2500[rpm]

◇タイヤ径を300[mm]とすると、回転速度は

・1[m/s]÷0.15[m] ＝ 6.67 [rad/s]

※秒１回転強

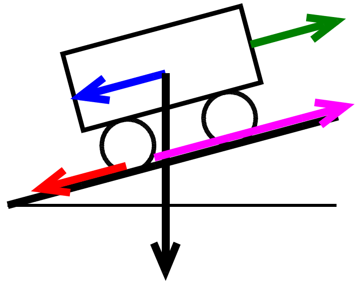
◆減速比

・2500[rpm] → 2500÷60 ＝ 41.7[rps]

→ 41.7×２×3.14 ＝ 261.7[rad/s]

・6.67[rad/s]÷261.7[rad/s] ≒ 1/39[]

車輪移動ロボットの動力計算



○ 減速比の確認

（◇仕様 1[m/s] 推進力 450[N]）タイヤ300[mm]

◇モータ 1.76[Nm] 2500[rpm] ◇減速比 1/39

◇車輪の回転速度、トルク

・2500[rpm]÷39＝64.1[rpm] ＝ 6.71[rad/s]

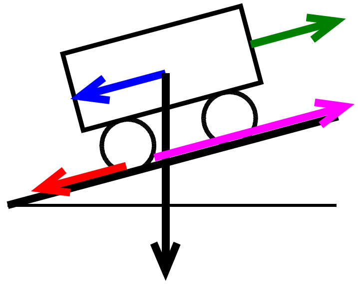
・1.76[Nm]×39＝68.6[Nm] ※効率100%

◇車輪の速度、推進力

・6.71×0.15＝1.01[m/s] ＞ 1[m/s] OK

・68.6÷0.15＝457[N] ＞ 450[N] OK

車輪移動ロボットの動力計算

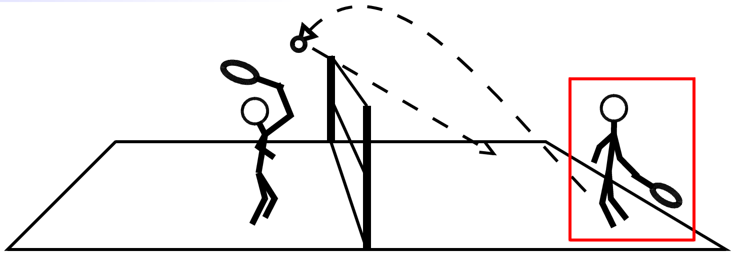


○ 計算の方針

- 必ずSI単位、倍数なしに直す。
  ※特に、[rpm]
- 必要な動力を計算 → モータを選定
  ※一般には効率による目減りを加味
- 減速比を「速度」でほぼ正確に決定。
  ※モータ動力の余裕は全てトルクに
- 減速比から再計算して、チェックする。

バドミントン練習ロボット　→C14

○　ロボットの概要



◇ロボットの用途

・バドミントン用の「ピッチングマシーン」

・一人での練習用に

◇装置の方針

・ラケットをモータ１軸で回転、
羽根を飛ばす。

・タイミング制御のために、
１回ごとに加速・減速・停止。

バドミントン練習ロボット

○ 機構部の検討

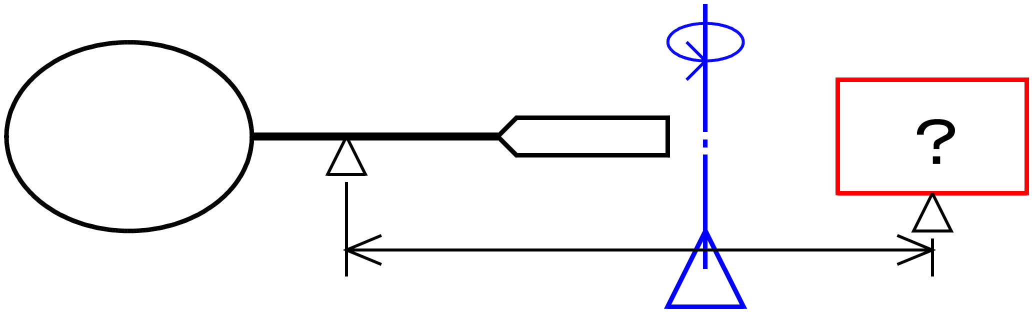
◇ポイント

- 高速回転するので、重心を回転軸上に乗せる。
  ※ずれていると振動発生
- 加速・減速のために、慣性モーメントをなるべく小さく押さえる。

バドミントン練習ロボット

○　重心のバランス

◇釣り合い錘

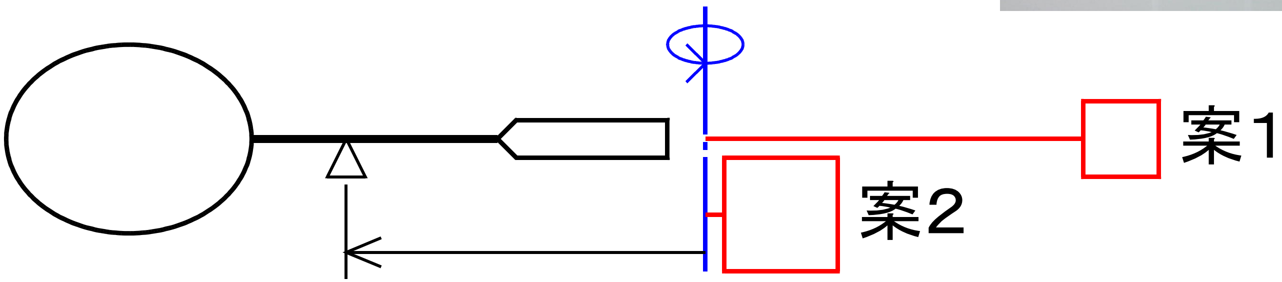


- 重心を回転軸上に。　→調整可能な設計
- 固定金具やネジ類も影響する。
- 釣り合い錘の質量と位置には決定の余地：
  (位置)×(質量)のみが計算で決まる。

バドミントン練習ロボット

○ 鍾の位置の検討

◇慣性モーメントの最小化

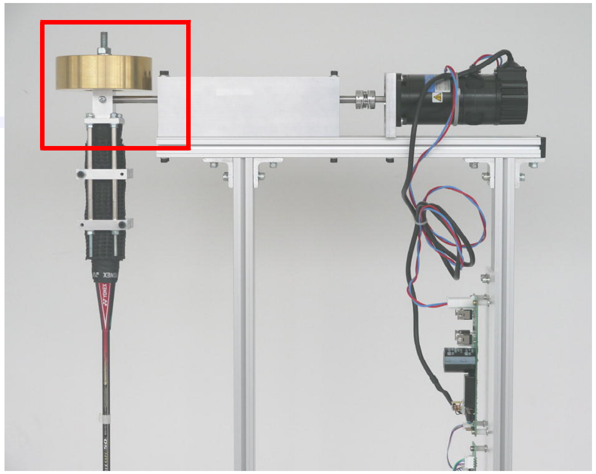


・ラケット等から釣合錘の(質量)×(位置)決定

・案1：小さい錘を遠くに　→全体は軽くなる

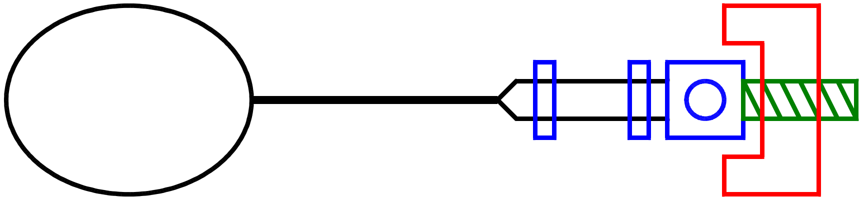
・案2：大きな錘を近くに　→慣性モ小さくなる

バドミントン練習ロボット



○ 機構部の検討

◇最終決定案



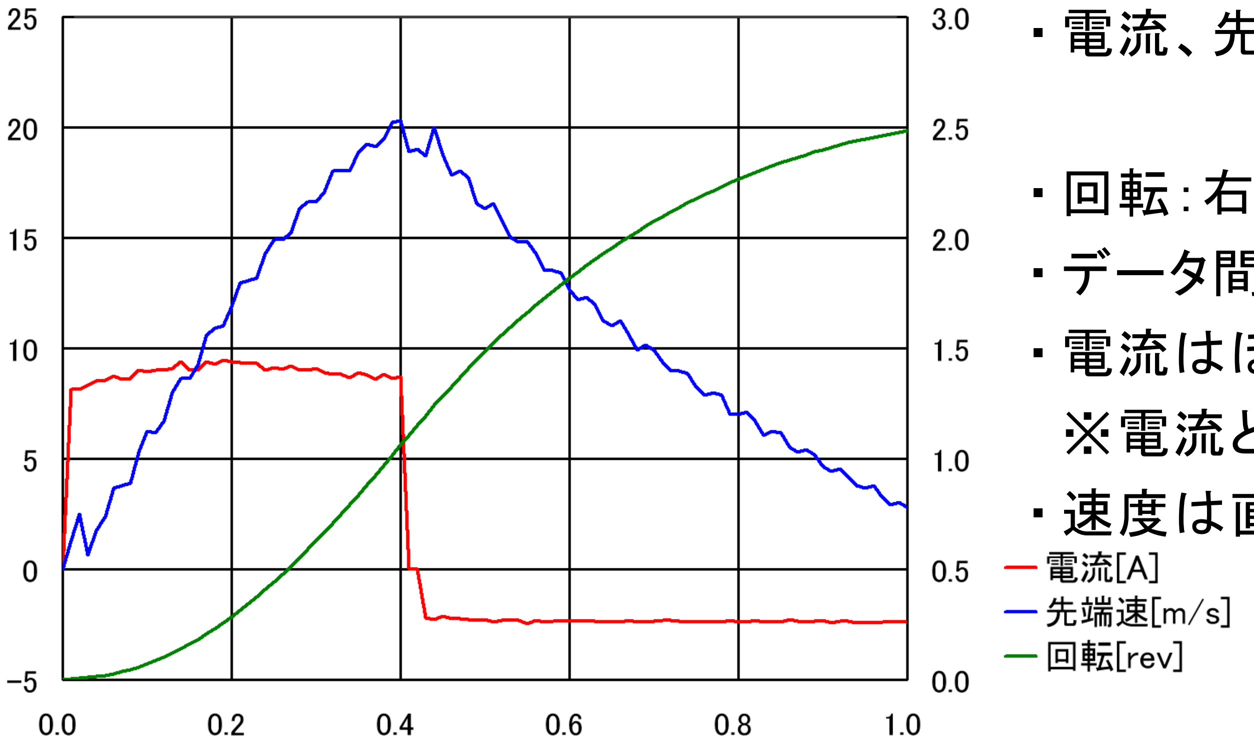
- 回転軸およびラケット固定部
- 釣り合い錘
- 錘調整用ねじ

※腕の長さも短い方が有利(回転速度は上がる)

バドミントン練習ロボット

○ 動作時のデータ

◇一振りする間の状態変化



- 電流、先端速度：左縦軸
- 回転：右縦軸
- データ間隔：0.01[s]
- 電流はほぼ指令通り
  ※電流とトルクは比例
- 速度は直線的

まとめ

○ 基本法則

- さまざまな機械の動作を説明するために必要な法則は、実はそれほど多くない。
- SI単位は、法則を基にして構築してあり、SI単位を使えば途中の計算がすっきり。
- 機械の理解には、運動の法則と、対象に作用する力を把握することが重要。
- エネルギー・仕事・動力は、実用的な計算に便利である。

まとめ

○ 基本法則 と 目的別の計算用の数式

- 選定ガイドなどにある計算式は、基本法則から導き出された結果の式、もしくは簡易式である。
- 目的ごとの計算用の数式は便利であるが、用途限定で、目的に応じてそれぞれ必要。
- 基本法則の活用に慣れると、多少手間は多いが、適用範囲はアイデア次第。