

メカを動かす基本法則

仙台市地域連携フェロー

熊谷正朗

kumagai@tjcc.tohoku-gakuin.ac.jp

東北学院大学工学部
ロボット開発工学研究室 RDE

今回の目的

○ メカを理解するための法則の基礎

テーマ1: 個々の概念の解説

- ・基本法則と単位
- ・運動の法則
- ・力、仕事、エネルギー

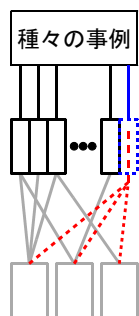
テーマ2: 具体事例にみる法則の適用

- ・台形加減速の意義と計算
- ・車輪走行ロボットの動力計算
- ・バドミントン練習ロボットの運動計算

基本法則の理解・再確認

○ シンプルなルールで多くを説明

◇基本法則の特徴



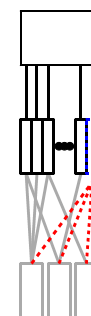
- ・なるべく少ないルールの組み合わせ
- ・実は、「理解すべきこと」は少ない。
- ・個々の状況ごとの説明ではないため、「調べても見つからない」型トラブルが発生しにくい。

※考えてもわからない、はあり得る

基本法則の理解・再確認

○ 個別の専用計算式 VS 基本法則

◇専用計算式



- 指定の数値を入れれば、**答えが出る**。
- △ 少しでも形式が外れると使いにくい。
- × 間違った**条件**で使うと大きな差異。

◇基本法則

- 適用方法を理解すれば、**多くの応用**。
- 新しいアイデアも検討しやすい。
- × 本質を理解して、計算を積み上げる手間。

基本法則のための単位

○ 国際単位系 (SI単位系)

◇ 7種の基本単位 : すべての単位の元

- ・ 時間 [s, 秒]
- ・ 長さ [m, メートル]
- ・ 質量 [kg, キログラム]
- ・ 電流 [A, アンペア]
- ・ 熱力学温度 [K, ケルビン]
- ・ 物質量 [mol, モル]
- ・ 光度 [cd, カンデラ]

基本法則のための単位

○ SI組立単位

◇ 定義に従い基本単位の組み合わせで構成

- ・ 面積 [m^2 , 平方メートル]
- ・ 体積 [m^3 , 立方メートル]
- ・ 速さ [m/s , メートル毎秒]
- ・ 密度 [kg/m^3 , kg 毎立方メートル]

◇ 専用の名称がある場合の例

- ・ 力 [kgm/s^2] = [N, ニュートン]
- ・ 圧力 [N/m^2] = [Pa, パスカル]

基本法則のための単位

○ SI接頭辞 (接頭語)

◇ 単位の桁を変える ($10^{-24} \sim 10^{24}$)

- ・ $\text{km} = 1000\text{m}$, $\text{mm} = 0.001\text{m}$

◇ よく使う接頭辞

- ・ k (キロ) = 10^3 = 1000倍
- ・ M (メガ) = 10^6 = 100万倍
- ・ m (ミリ) = 10^{-3} = 1000分の1, 0.001
- ・ μ , u (マイクロ) = 10^{-6} = 100万分の1 0.000001

基本法則のための単位

○ SI接頭辞 (接頭語)

◇ よく使う接頭辞

- ・ k, M, m, μ (u)
- ・ da (デカ) = 10^1 = 10
- ・ d (デシ) = 10^{-1} = 0.1
- ・ h (ヘクト) = 10^2 = 100
- ・ c (センチ) = 10^{-2} = 0.01
- ・ G (ギガ) = 10^9 = 10億
- ・ n (ナノ) = 10^{-9}
- ・ T (テラ) = 10^{12} = 1兆
- ・ p (ピコ) = 10^{-12}

◇ 使用例

hPa (ヘクトパスカル)、ha (ヘクタール)、dB (デシベル)、
daN (デカニュートン)、{dl, cl, ml, ul, pl : リットル}

基本法則のための単位

○ 基本法則を使うときは接頭辞なしで

◇単位は「へんな係数」が不要な定義

$$\cdot \text{力 } 1[\text{N}] = \text{質量 } 1[\text{kg}] \times \text{加速度 } 1[\text{m/s}^2]$$

◇接頭辞の混乱を避けられる

$$\cdot \text{電力 } 1[\text{W}] = \text{電圧 } 1[\text{V}] \times \text{電流 } 1[\text{A}]$$

$$\rightarrow 1[\text{mV}] \times 1[\text{mA}] = ? \quad 1[\text{mW}]? \quad \times \text{NG}$$

$$\rightarrow 10^{-3}[\text{V}] \times 10^{-3}[\text{A}] = 10^{-6}[\text{W}] \quad (=1[\mu\text{W}])$$

◇日常的な単位の換算

$$\cdot \text{時、分} \rightarrow \text{秒} \quad \text{度、分、秒(、回転)} \rightarrow \text{ラジアン}$$

用語・単位・解説

○ 質量と重量

◇質量 [kg]

- ・ある意味、「重さ」
- ・物体の動きにくさなどを表す数値
- ・万有引力の大きさに影響する数値
- ・上皿天秤で測定される。

◇重量 [N] [kgf] ※力であって、[kg]ではない

- ・物体が地球に引かれる力の大きさ
- ・バネばかりで測定される。

用語・単位・解説

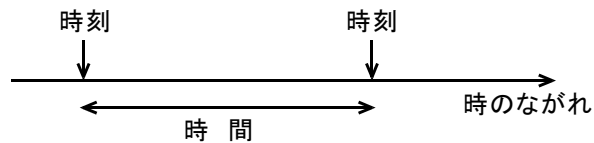
○ 時間と時刻

◇時刻 [s]

- ・時の流れの中の一点を指す

◇時間 [s]

- ・時刻と時刻の間隔



用語・単位・解説

○ 運動関係（直線運動）

※単位○○=1

◇速さ・速度 [m/s]

- ・単位時間あたりの移動距離、位置の変化
- ・「速度」というと、方向を含む解釈がある。

◇加速度 [m/s²] ((m/s)/s)

- ・単位時間あたりの速度の変化

◇力 [N = kg m/s²] ※[ニュートン]

- ・後述の運動の法則によって定義

用語・単位・解説

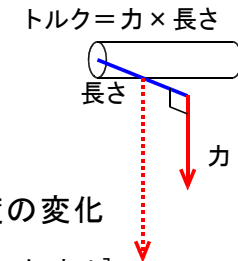
○ 運動関係 (回転運動)

- ◇角度 [rad, ラジアン] ※日常では度(deg)
 - ・ $360\text{度} = 2\pi\text{ラジアン}$ ($\pi = \text{円周率}$, 約3.14)
 - ・ 数値は半端ながら、法則がすっきりする。
 - ・ [rad]は「比」なので、本来は[m/m]。
 - ・ そのため、[rad]が消えることがある。
- ◇角速度 [rad/s] ※deg/sもよく使われる
 - ・ 単位時間あたりの角度変化

用語・単位・解説

○ 運動関係 (回転運動)

- ◇角度 [rad, ラジアン]
- ◇角速度 [rad/s]
- ◇角加速度 [rad/s²]
 - ・ 単位時間あたりの角速度の変化
- ◇トルク [Nm] ※[ニュートン メートル]
 - ・ 軸などを回転させる力 = 力 × 長さ
- ◇慣性モーメント [kgm²]
 - ・ 回転における質量にあたるもの(後述)



用語・単位・解説

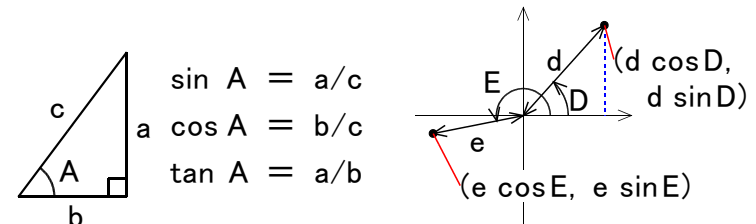
○ 運動と数学

- ◇(時間で)微分
 - ・ 瞬間ごとの時間変化を求めることに相当。
 - 位置を時間微分 → 時々刻々の速度
 - 速度を時間微分 → 時々刻々の加速度
- ◇(時間で)積分
 - ・ 微分の反対の作業
 - ・ 角速度を時間積分 → 角度
 - ※実際には「積分した範囲での変化を積算したもの」

用語・単位・解説

○ 三角関数

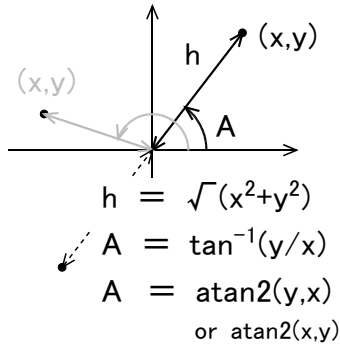
- ◇角度と座標の関係を表せる
 - ・ sin(正弦)、cos(余弦)、tan(正接)
 - ・ および逆関数 $\sin^{-1}$ 、 $\cos^{-1}$ 、 $\tan^{-1}$ (atan)



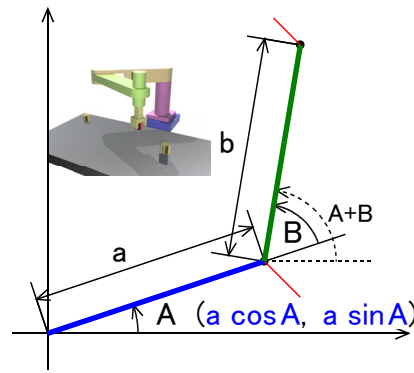
用語・単位・解説

○ 三角関数

◇応用例



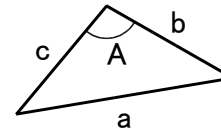
$$(a \cos A + b \cos(A+B), a \sin A + b \sin(A+B))$$



用語・単位・解説

○ 三角関数: 余弦定理

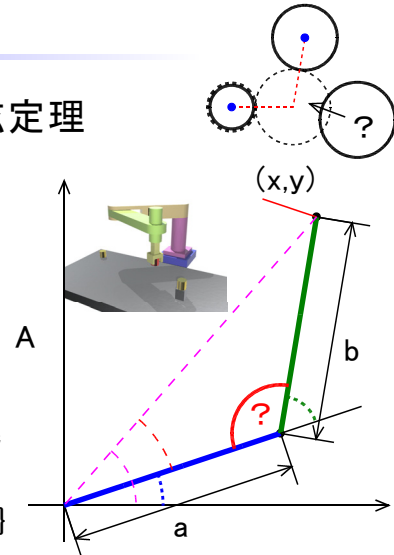
◇3辺と角度



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc$$

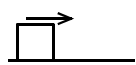
$$A = \cos^{-1} \{ (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc \}$$



運動の法則

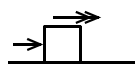
○ 物体の運動の基本 (※身の回りレベルで)

◇1: 慣性の法則



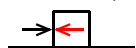
- ・外部から力がかかからなければ、**速度不変**
 ※静止している→静止のまま、移動中→等速直線運動

◇2: 運動の法則



- ・物体が**力を受けると加速度**が生じる。
 ・加速度は**力に比例し、質量に反比例**

◇3: 作用反作用の法則



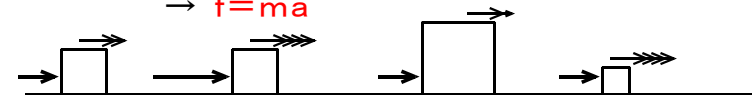
- ・力を作用させると、逆方向に力を受ける。

運動の法則

○ 運動の第2法則

◇加速度は力に比例、質量に反比例

- ・力が大きいほど加速する。
- ・質量が大きい(≡重い)ほど、加速しにくい。
- ・加速しにくい = (一般的表現で減速しにくい)。
- ・(加速度) = (力) ÷ (質量)
 → (力) = (質量) × (加速度)
 → **$f = ma$**



運動の法則 回転の場合

○ 直線の場合との類似性

◇ある軸周りに回転しているものは、外部からの作用がなければ、**角速度は維持**される。

◇**軸にトルク**が作用する場合、**角加速度**が生じる。

・トルクに比例し、慣性モーメントに反比例

・トルク [Nm] = 慣性モーメント [kgm²]
× 角加速度 [rad/s²]

※[kgm² × rad/s²] = [kgm²/s²] = [kgm/s²・m] = [Nm]

※明確に運動の軸がない場合はかなり複雑

運動の法則 回転の場合

○ 慣性モーメント

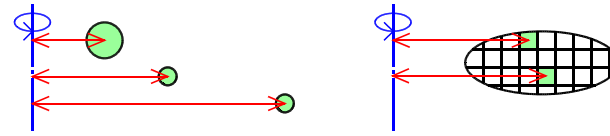
◇回転の質量にあたる量

◇定義・計算

・軸周りに回転するものを細切れにする

→ (小片の質量) × (軸からの半径)²

→ すべてを合計する



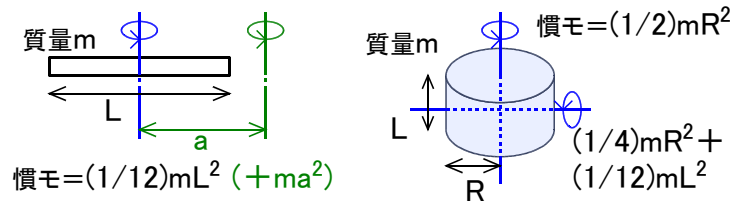
運動の法則 回転の場合

○ 慣性モーメント

◇回転の質量にあたる量

◇定義・計算

・棒、円筒や直方体など、主要な物体の慣性モーメントは計算式がある。



運動の法則 回転の場合

○ 慣性モーメント

◇回転の質量にあたる量

◇性質

・小さいほど、回転の加減速がしやすい

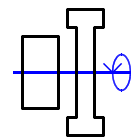
→ 急峻な動きをするものは小さく

※これは直線運動の質量と同じ

・大きいほど、回転の変動が少ない

→ はずみ車などの用途

→ 同質量なら外周に寄せる

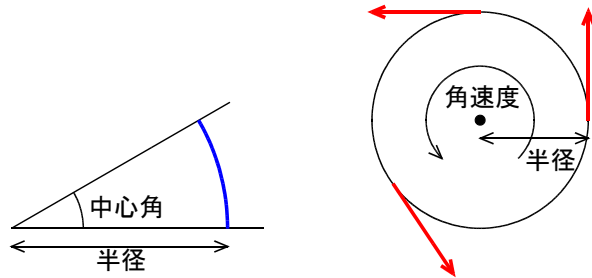


回転運動と直線運動

○ 図形的関係

◇円弧の長さ[m] = 半径[m] × 中心角[rad]

◇周速度[m/s] = 半径[m] × 角速度[rad/s]

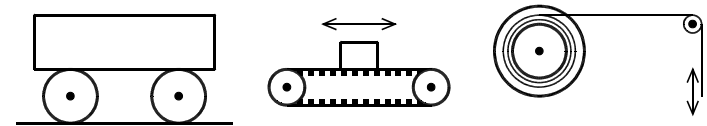


回転運動と直線運動

○ 使用例

◇円弧の長さ[m] = 半径[m] × 中心角[rad]

◇周速度[m/s] = 半径[m] × 角速度[rad/s]



車輪の回転と
車両の移動距離/速度

ベルトものの
速度の計算

ワイヤドラムの
回転と送り速度

物体に作用する力 重力

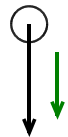
○ 重力

◇メカトロで最も大きな影響を持つ力

◇計算式

重力[N] = 質量[kg] × 重力加速度[m/s²]

$f = mg$



◇重力加速度

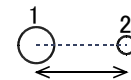
- ・「重力(重量)は質量に比例する」の比例係数。結果的に加速度の単位に。
- ・約9.8 ～地域によって異なる

物体に作用する力 重力

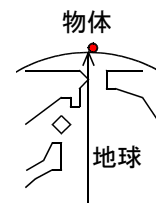
○ 重力加速度の正体

◇万有引力

$f = GMm/R^2$



・ (万有引力定数)
× (物体1の質量) × (物体2の質量)
÷ (物体1、2間の距離)²



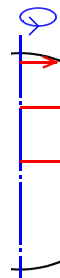
・ (定数) × (地球質量) × (物体質量) ÷ (地球半径)²
= (物体質量)
× ((定数) × (地球質量) × (半径)²)
= (物体質量) × (万有引力による加速度)

物体に作用する力 重力

○ 重力加速度の正体

◇万有引力

- ・足下の組成などで微妙に変わる



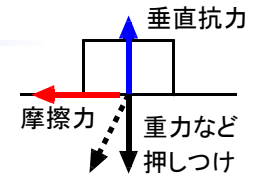
◇遠心力

- ・地球の自転に伴う遠心力＝赤道で大
- ・ $(\text{質量}) \times (\text{半径}) \times (\text{角速度})^2$
- ・ $= (\text{質量}) \times ((\text{半径}) \times (\text{角速度})^2)$
- ・ $= (\text{質量}) \times (\text{遠心力による加速度})$

◇主にこれらの合計

物体に作用する力 摩擦力

○ 接触面に働く力



◇大きさ

(最大で) **摩擦係数** × **垂直抗力**

垂直抗力＝接触面を(から)垂直に押す力

斜め方向の力の場合、垂直な分のみ

◇方向

- ・滑っていない場合: その他の力の反対
- ・滑っている場合: 運動方向と反対

物体に作用する力 摩擦力

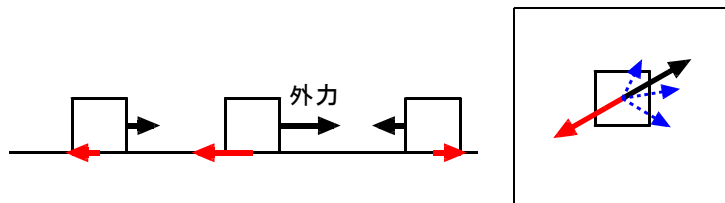
○ 静摩擦力

◇大きさ

【最大で】静摩擦係数 × 垂直抗力

◇方向

- ・その他の力の合計 の 反対方向



物体に作用する力 摩擦力

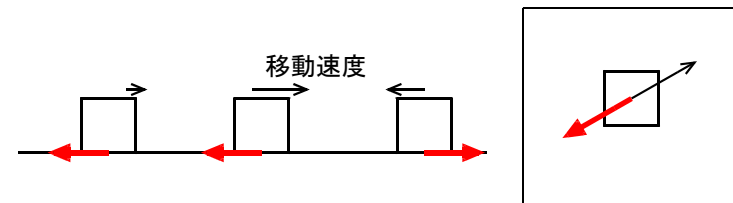
○ 動摩擦力

◇大きさ

動摩擦係数 × 垂直抗力 (速さによらない)

◇方向

- ・運動の反対方向

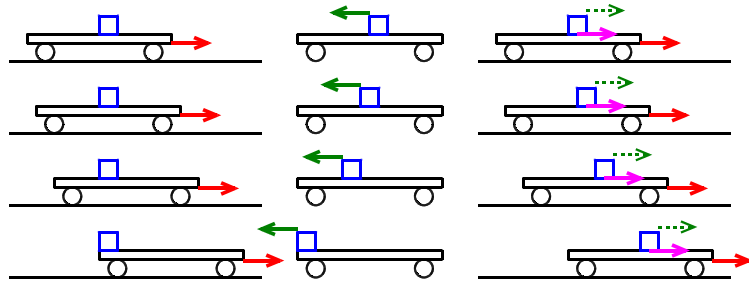


物体に作用する力 慣性力と遠心力

○ 周りの動きにより生じる見かけの力

◇慣性力の例

- ・ 周りが動くから / 周りと共に動くには

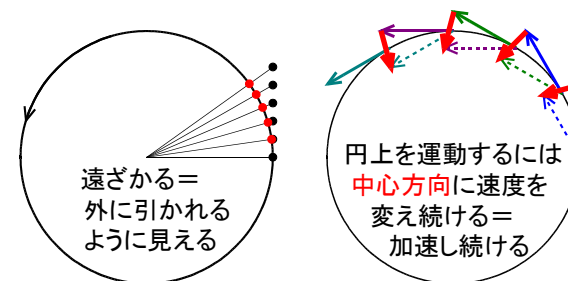


物体に作用する力 慣性力と遠心力

○ 周りの動きにより生じる見かけの力

◇遠心力・向心力

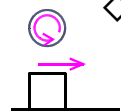
- ・ 円軌道 VS 慣性による直進



仕事とエネルギー

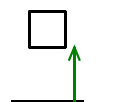
○ エネルギー [J]=[Nm]

◇物理的に仕事できる能力



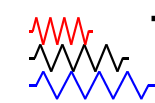
- ・ 運動エネルギー

速度をもつ物体が持つ



- ・ 重力による位置エネルギー

高いところにある物体が持つ



- ・ バネによる位置エネルギー

伸びた/縮んだバネが持つ

- ・ 他: 熱、化学、電気他

仕事とエネルギー

○ 力学的な仕事 [J]=[Nm]

◇計算:

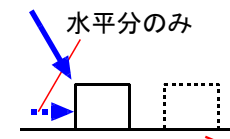
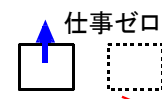
作用する力[N] × 移動距離[m]

※方向が一致しない場合は一致する分を計算

◇例:

- ・ 重力を支えながら、持ち上げる

- ・ バネを押し縮める



仕事とエネルギー

○ エネルギー

◇物理的に仕事できる能力 $[J] = [Nm]$

◇エネルギーと仕事

・他者への仕事

→ エネルギーが減少

※速度減、位置低下、バネ緩む

・他者から仕事を受ける

→ エネルギーが増加する

※速度増、位置上昇、バネ変形

仕事とエネルギー

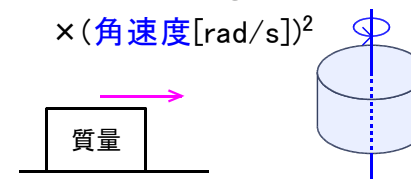
○ 運動エネルギー

◇直線運動

$$(1/2)(\text{質量}[\text{kg}]) \times (\text{速度}[\text{m/s}])^2$$

◇回転運動

$$(1/2)(\text{慣性モーメント}[\text{kgm}^2]) \times (\text{角速度}[\text{rad/s}])^2$$



仕事とエネルギー

○ 位置エネルギー

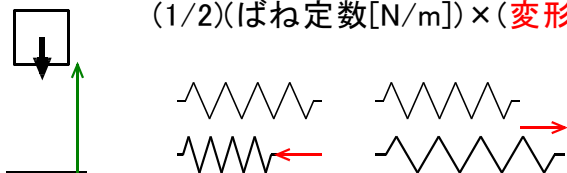
◇重力による位置エネルギー

$$(\text{重力}[\text{N}]) \times (\text{基準からの高さ}[\text{m}]) =$$

$$(\text{質量}[\text{kg}]) \times (\text{重力加速度}[\text{m/s}^2]) \times (\text{高さ}[\text{m}])$$

◇バネの変形による位置エネルギー

$$(1/2)(\text{ばね定数}[\text{N/m}]) \times (\text{変形量}[\text{m}])^2$$



仕事とエネルギー

○ 動力・仕事率

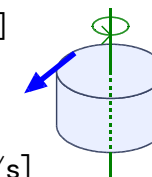
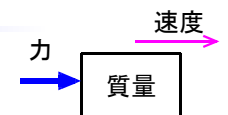
◇単位時間あたりの仕事

$$\text{仕事率} \cdot \text{動力} [W = J/s = Nm/s]$$

$$= \text{仕事} [J (Nm)] \div \text{時間} [s]$$

$$= \text{力} [N] \times \text{移動速度} [\text{m/s}]$$

$$= \text{トルク} [Nm] \times \text{角速度} [\text{rad/s}]$$



◇動力と電力

・効率100%のアクチュエータに入れた

電力[W] は そのまま 出力動力[W] に

仕事とエネルギー

○ エネルギー・動力計算の活用

◇事例：バネの大きさ計算

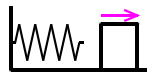
- ・目的： ある速度の物体を受け止めて、反対方向に押し返すバネの選定する。



- ・運動エネルギーを計算する。



- ・圧縮のストロークを仮に定めて、運動エネルギーに対応するばね定数を計算。



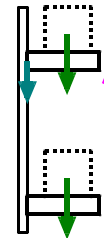
- ・ばね定数とストロークからばねを選定
→ストロークの調整

仕事とエネルギー

○ エネルギー・動力計算の活用

◇事例：エレベータ機構のモータ

- ・可動部分の質量を算出する。
 - ・重力と摩擦力などを見積もる。
 - ・可動部分の仕様速度を定める。
 - ・動力[W] = 重力など[N] × 速度[m/s]
が、モータに要求される動力。
 - ・ある程度の係数をかければ消費電力。
- ※減速機は損失を無視すれば動力変わらず



法則の適用事例

○ 具体的な計算例

◇台形加減速・S字加減速

- ・なにのために必要か
- ・台形加減速の計算

◇車輪走行ロボットの動力計算

- ・力の見積 と モータ、減速比 の検討

◇バドミントン練習ロボットの運動計算

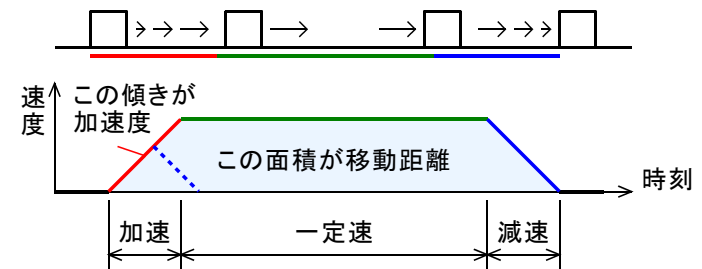
- ・回転部分の設計概念
- ・慣性モーメントの計算とモータの回転

台形加減速

○ 台形加減速とは？

◇一定速度の運動の前後に、加速・減速区間

◇直線運動でも回転運動でも用いる

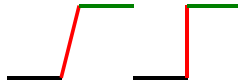


台形加減速

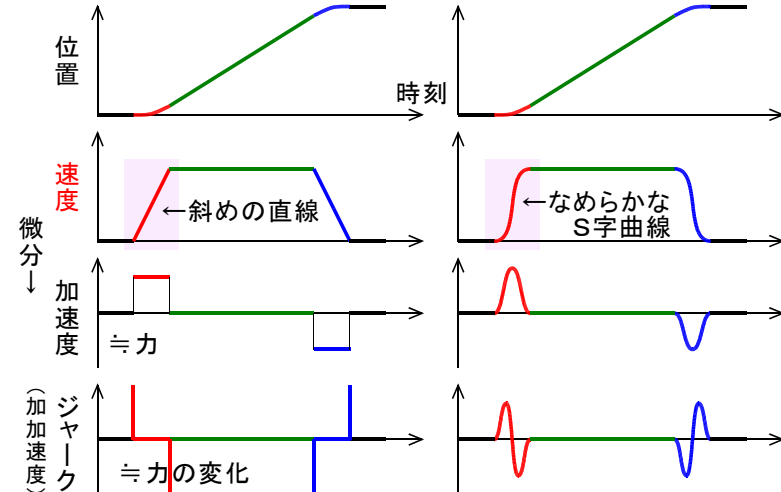
○ 加減速動作の目的

◇慣性力の低減

- ・もしも、いきなり目標速度を出したら？
→ 速度が短時間で急に変化する
→ **加速度が大きい** = **大きな力が必要**
- ・敢えて、加速度を押さえることで、
適切に**加速の力を低減**する。
- ・DC, ACモータ: 加速時の不安定さを低減
- ・ステッピングモータ: 脱調防止



台形加減速とS字加減速



台形加減速とS字加減速

○ 加速度の時間変化の比較

◇ジャーク (躍度, 加加速度)

- ・加速度の微分(時間変化)
≡ 各部にかかる**力の時間変化**

◇比較

- ・加速度: 台形は一定、S字は変化
- ・ジャーク: 台形はスパイク状、Sは滑らか
→ **台形は急な変化で振動誘発**

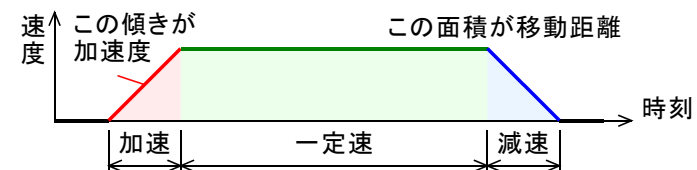
※乗り心地の悪さも類似の現象

台形加減速

高級なコントローラでは
自動計算してくれる

○ 台形加減速の計算

- ・加速度を決める(トルクなどから)
- ・加減速部の面積を求める=移動量
- ・目標の移動距離からこれを引いて、
一定速度で移動する時間を計算する。



車輪移動ロボットの動力計算

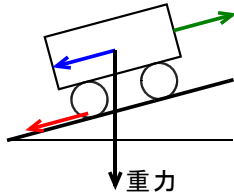
○ 目標仕様

◇車体質量 搭載物込み
100[kg]

◆移動速度
1 [m/s]程度

◆ある程度の傾斜を走れる
傾斜 15[deg]

◆ある程度の悪路を走れる
走行抵抗係数 0.2
※摩擦と似た扱い



車輪移動ロボットの動力計算

○ 必要な推進力の計算

◇車体質量 搭載物込み 100[kg]

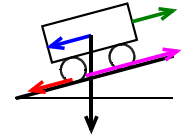
◆傾斜15[deg]で受ける重力
 $100 \times 9.8 \times \sin(15\text{deg}) \doteq 250[\text{N}]$

◆走行抵抗、係数 0.2
 $100 \times 9.8 \times 0.2 \doteq 200[\text{N}]$

◆走行に必要な推進力
 $250 + 200 = 450[\text{N}]$
※ただし、加減速に必要な分は含まれず

※15deg斜面であれば、「 $\times \cos(15\text{deg})$ 」だが大きな差はない

※駆動に必要な車輪の摩擦力は考慮していない



車輪移動ロボットの動力計算

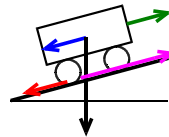
○ 必要な動力の計算

◆移動速度 1[m/s]
◆走行に必要な推進力 450[N]

◇動力=速度×力 = $1 \times 450 = 450[\text{W}]$
→ 計算上は定格500[W]程度のモータ
【注】簡単のためメカ効率100%

◇モータの例:

山洋電気 直流サーボモータ T850
定格トルク 1.76[Nm]
定格回転 2500[rpm]



車輪移動ロボットの動力計算

○ 必要な減速比の計算

◆移動速度 1[m/s] ◆推進力 450[N]

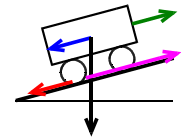
◇モータ トルク 1.76[Nm]、回転 2500[rpm]

◇タイヤ径を300[mm]とすると、回転速度は
 $1[\text{m/s}] \div 0.15[\text{m}] = 6.67 [\text{rad/s}]$

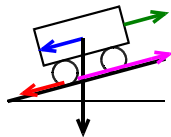
※秒1回転強

◆減速比

・ $2500[\text{rpm}] \rightarrow 2500 \div 60 = 41.7[\text{rps}]$
→ $41.7 \times 2 \times 3.14 = 261.7[\text{rad/s}]$
・ $6.67[\text{rad/s}] \div 261.7[\text{rad/s}] \doteq 1/39[]$



車輪移動ロボットの動力計算



○ 減速比の確認

(◇仕様 1[m/s] 推進力 450[N]) タイヤ300[mm]

◇モータ 1.76[Nm] 2500[rpm] ◇減速比 1/39

◇車輪の回転速度、トルク

・ $2500[\text{rpm}] \div 39 = 64.1[\text{rpm}] = 6.71[\text{rad/s}]$

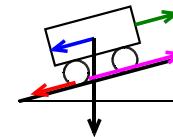
・ $1.76[\text{Nm}] \times 39 = 68.6[\text{Nm}]$ ※効率100%

◇車輪の速度、推進力

・ $6.71 \times 0.15 = 1.01[\text{m/s}] > 1[\text{m/s}]$ OK

・ $68.6 \div 0.15 = 457[\text{N}] > 450[\text{N}]$ OK

車輪移動ロボットの動力計算



○ 計算の方針

・ 必ずSI単位、倍数なしに直す。

※特に、[rpm]

・ 必要な動力を計算 → モータを選定

※一般には効率による目減りを加味

・ 減速比を「速度」でほぼ正確に決定。

※モータ動力の余裕は全てトルクに

・ 減速比から再計算して、チェックする。

バドミントン練習ロボット →C14

○ ロボットの概要

◇ロボットの用途

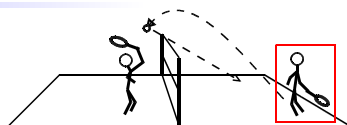
・ バドミントン用の「ピッチングマシン」

・ 一人での練習用に

◇装置の方針

・ ラケットをモータ1軸で回転、羽根を飛ばす。

・ タイミング制御のために、1回ごとに加速・減速・停止。



バドミントン練習ロボット

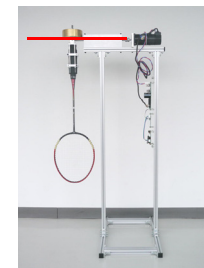
○ 機構部の検討

◇ポイント

・ 高速回転するので、**重心を回転軸上に**乗せる。

※ずれていると振動発生

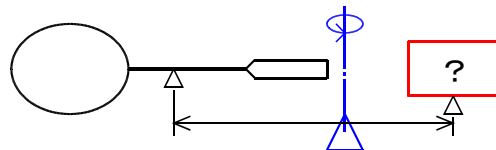
・ 加速・減速のために、**慣性モーメントをなるべく小さく**押さえる。



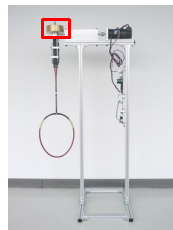
バドミントン練習ロボット

○ 重心のバランス

◇釣合い錘



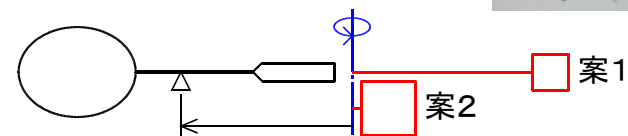
- ・重心を回転軸上に。→調整可能な設計
- ・固定金具やネジ類も影響する。
- ・釣り合い錘の質量と位置には決定の余地：
(位置)×(質量)のみが計算で決まる。



バドミントン練習ロボット

○ 錘の位置の検討

◇慣性モーメントの最小化



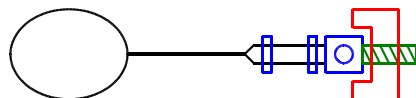
- ・ラケット等から釣合錘の(質量)×(位置)決定
- ・案1: 小さい錘を遠くに → 全体は軽くなる
- ・案2: 大きな錘を近くに → 慣性モ小さくなる



バドミントン練習ロボット

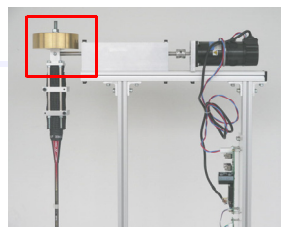
○ 機構部の検討

◇最終決定案



- ・回転軸およびラケット固定部
- ・釣り合い錘
- ・錘調整用ねじ

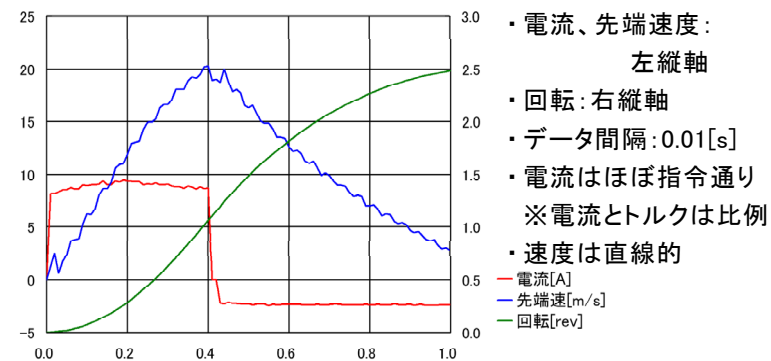
※腕の長さも短い方が有利(回転速度は上がる)



バドミントン練習ロボット

○ 動作時のデータ

◇一振りする間の状態変化



まとめ

○ 基本法則

- ・さまざまな機械の動作を説明するために必要な法則は、実はそれほど多くない。
- ・SI単位は、法則を基にして構築しており、SI単位を使えば途中の計算がすっきり。
- ・機械の理解には、運動の法則と、対象に作用する力を把握することが重要。
- ・エネルギー・仕事・動力は、実用的な計算に便利である。

まとめ

○ 基本法則 と 目的別の計算用の数式

- ・選定ガイドなどにある計算式は、基本法則から導き出された結果の式、もしくは簡易式である。
- ・目的ごとの計算用の数式は便利であるが、用途限定で、目的に応じてそれぞれ必要。
- ・基本法則の活用に慣れると、多少手間は多いが、適用範囲はアイデア次第。